Минимаксные задачи в тригонометрии

В настоящем листке рассматриваются уравнения и неравенства, для решения которых используются оценки правой и левой частей. Чтобы стало понятно, о каких задачах идёт речь, начнём с совсем простого примера.

Задача 1. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2001*) Решить уравнение

$$x^2-\cos\left(2x^2\right)+1=0.$$

Решение. «Смешанный» вид этого уравнения говорит о том, что здесь требуются нестандартные действия. Запишем уравнение следующим образом:

$$x^2+1=\cos\left(2x^2\right). \tag{1}$$

Левая часть (1) удовлетворяет неравенству $x^2+1\geqslant 1$. В то же время для правой части (1) справедливо противоположное неравенство $\cos\left(2x^2\right)\leqslant 1$. Следовательно, равенство в (1) возможно в том и только в том случае, когда оба указанных неравенства одновременно обращаются в равенства; иными словами, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+1=1,\\ \cos\left(2x^2\right)=1. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x=0$.

Ответ: $x=0$.

В общем виде наши рассуждения выглядят следующим образом. Пусть имеется уравнение

$$f(x)=g(x). \tag{2}$$

Функции f и g могут быть устроены так, что это уравнение не решается обычными методами. Предположим, однако, что нам удалось найти такое число M, что для всех допустимых значений x выполнены неравенства $f(x)\geqslant M$ и $g(x)\leqslant M$. Тогда равенство (2) достигается в том единственном случае, когда одновременно $f(x)=M$ и $g(x)=M$; иными словами, наше «нерешаемое» уравнение (2) оказывается равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=M,\\ g(x)=M. \end{cases} \tag{3}$$

А эту систему уже получается решить стандартными приёмами.

Решение системы (3) — это такое значение x, при котором функция $f(x)$ достигает своего минимума и в то же время функция $g(x)$ достигает своего максимума. Поэтому рассматриваемые задачи называются *минимаксными*[1].

Задача 2. (*«Физтех», 2016*) Решите уравнение

$$(\cos x-3\cos 4x)^2=16+\sin^2 3x.$$

[1]Другие названия данного метода — *метод оценок, метод экстремальных оценок, метод мажорант*

Решение. Из очевидного неравенства $-4 \leqslant \cos x - 3\cos 4x \leqslant 4$ имеем оценку левой части уравнения: $(\cos x - 3\cos 4x)^2 \leqslant 16$. В то же время правая часть не меньше 16. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части одновременно равны 16.

Левая часть равна 16, когда одновременно $\cos x = 1$ и $\cos 4x = -1$ или когда одновременно $\cos x = -1$ и $\cos 4x = 1$. Первый случай невозможен, а во втором имеем $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). При таких x, как нетрудно убедиться, правая часть уравнения равна 16.

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Решите уравнение

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}\,.$$

Решение. Сумму косинусов превращаем в произведение, а для косинуса суммы пишем формулу половинного угла:

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \left(2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}\,,$$

откуда

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 1 = 0. \tag{4}$$

Обозначим

$$t = \cos\frac{x+y}{2}\,, \quad u = \cos\frac{x-y}{2}\,.$$

В этих обозначениях уравнение (4) примет вид:

$$4t^2 - 4ut + 1 = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) является квадратным относительно t, причём $|u| \leqslant 1$. Дискриминант:

$$D/4 = 4(u^2 - 1) \leqslant 0,$$

поэтому уравнение (5) может иметь корни лишь при нулевом дискриминанте, то есть при $u = \pm 1$. Если $u = 1$, то $t = \frac{1}{2}$, а если $u = -1$, то $t = -\frac{1}{2}$. Таким образом, уравнение (4) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1, \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = -1, \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Имеем (как обычно, $k, l \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 2\pi k, \\ \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = \pi + 2\pi k, \\ \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l\,. \end{cases}$$

Складываем и вычитаем равенства каждой системы и вводим новые целочисленные величины $m = k + l$, $n = l - k$. Этот последний технический шаг оставляется читателю.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

В минимаксных задачах иногда используется неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, справедливое для любых чисел $a, b \geqslant 0$:

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \tag{6}$$

(равенство достигается в единственном случае $a = b$). В частности, если $a > 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \tag{7}$$

(равенство достигается в единственном случае $a = 1$).

Задача 4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1.$$

Решение. В левой части стоит сумма двух взаимно обратных положительных слагаемых, которая в силу неравенства (7) не меньше 2:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) \geqslant 2.$$

В то же время для правой части имеем оценку сверху:

$$\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{x^2+1}} \leqslant 2$$

(поскольку под корнем стоит величина, не превосходящая 1). Следовательно, наше уравнение будет иметь решения лишь в том случае, когда обе части уравнения равны 2 одновременно.

Правая часть равна 2 только при $x = 1$ (это легко видеть из полученной выше оценки для правой части). Левая часть равна 2, только если каждое слагаемое равно 1:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(1+y)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \pi(1+y) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2n-3}{4} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $x = 1$, $y = \frac{2n-3}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x + \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = 1, \\ 4\cos x - 2\cos^2 x - \sin^3 y = 3. \end{cases} \tag{8}$$

Решение. В силу очевидного тождества $4t - 2t^2 = 2 - 2(1-t)^2$ имеем во втором уравнении:

$$2 - 2(1-\cos x)^2 - \sin^3 y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2(1-\cos x)^2 = -1 - \sin^3 y.$$

Левая часть полученного уравнения неотрицательна, а правая — неположительна; значит, второе уравнение (8) равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \cos x = 0, \\ -1 - \sin^3 y = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 2\pi n$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(n, k \in \mathbb{Z})$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения x и y удовлетворяют первому уравнению системы (8).

Ответ: $\left(2\pi n, -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $n, k \in \mathbb{Z}$

Задача 6. (*МГУ, ВМК, 1986*) Решить уравнение:

$$\sin 3x - 2\sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2\cos x.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$\sin 3x + \cos 3x + 2(a\sin x - \cos x) = 3\sqrt{2}\,, \tag{9}$$

где введено обозначение $a = -\sin 18x$. Во-первых, имеем:

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}\,. \tag{10}$$

Во-вторых, преобразуем выражение в скобках:

$$a\sin x - \cos x = \sqrt{a^2+1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos x\right).$$

Поскольку выполнено равенство

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2 = 1,$$

существует угол φ такой, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \cos\varphi, \qquad \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \sin\varphi.$$

Таким образом,

$$a\sin x - \cos x = \sqrt{a^2+1}(\sin x\cos\varphi - \cos x\sin\varphi) = \sqrt{a^2+1}\sin(x-\varphi).$$

Из этого тождества и с учётом неравенства

$$a^2 = \sin^2 18x \leqslant 1 \tag{11}$$

имеем:

$$a\sin x - \cos x \leqslant \sqrt{a^2+1} \leqslant \sqrt{2}\,. \tag{12}$$

Теперь сложим неравенство (10) с удвоенным неравенством (12):

$$\sin 3x + \cos 3x + 2(a\sin x - \cos x) \leqslant 3\sqrt{2}\,.$$

Сопоставляя это с нашим уравнением (9), мы приходим к выводу, что в каждом из неравенств (10), (11) и (12) должны одновременно достигаться равенства. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух систем (для случаев $a = 1$ и $a = -1$):

$$\begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\,, \\ -\sin 18x = 1, \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\,, \\ -\sin 18x = -1, \\ -\sin x - \cos x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

После очевидных преобразований:

$$\begin{cases} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin 18x = -1, \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin 18x = 1, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1. \end{cases}$$

В первой системе решениями третьего уравнения являются значения $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, которые удовлетворяют первому и второму уравнениям. Эти значения — решения исходного уравнения.

Во второй системе решениями третьего уравнения являются значения $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, которые не удовлетворяют второму уравнению и потому не являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x(\sin y + \cos y) + 2 = 0.$$

$y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = -\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi k$ или $y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}$

2. (*МГУ, ДВИ, 2014.4*) Решите уравнение

$$\cos^2 x - \cos x \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} = 0.$$

$x = \frac{7\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

3. (*МГУ, ДВИ, 2015.8*) Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3\sin\alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3\sin\alpha}.$$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\ (n \in \mathbb{Z}),\ \beta = 0$

4. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y).$$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2} + \pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Решите неравенство

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{ctg}^2 x \leqslant 2\cos^3 3x.$$

$\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Найдите наименьшее значение $|x - y|$ при условии

$$\left(\cos^4 x + 1\right)\left(4\cos^4 y + 1\right) = 8\cos^3 x \cos^2 y, \quad x \in [\pi; 2\pi], \quad y \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

$\frac{3\pi}{4}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011*) Решите неравенство

$$\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x \geqslant 1.$$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Решите уравнение

$$\sin^2\left(\frac{2013x}{2}\right)\cdot\cos^2(2014x)\cdot\sin^2\left(\frac{2015x}{2}\right)=1.$$

$\boxed{\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

9. (*«Физтех», 2016*) Решите уравнение

$$(\cos 2x-2\cos 4x)^2=9+\cos^2 5x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

10. (*ОММО, 2013*) Решить систему:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2\sin^2 y,\\ \sin^2 y+\cos^2 z=1.\end{cases}$$

$\boxed{x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ z=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ k,m,n\in\mathbb{Z}}$

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Определите минимальное значение величины $|x+y|$ при условии, что числа x и y удовлетворяют соотношению

$$5\cos(x+4y)-3\cos(x-4y)-4\sin(x-4y)=10.$$

$\boxed{\frac{\pi}{8}-\frac{3}{8}\arccos\frac{3}{5}}$

12. (*«Физтех», 2014*) Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x)=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\sin x}{4}\right)+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi\sin x}{4}\right)\quad\text{и}\quad g(x)=\frac{\sqrt{32+4x-x^2}+2x-2}{x-1}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

$\boxed{[-4;-\pi)\cup(-\pi;0)\cup(0;1)\cup\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},8\right\}}$

13. (*«Физтех», 2014*) Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}+2\sqrt{3}\operatorname{tg} x\quad\text{и}\quad g(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{21+4x-x^2}}+\frac{\sqrt{21+4x-x^2}}{2x+1}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

$\boxed{\left(-3;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6},2\right\}}$

14. (*«Ломоносов», 2015*) Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\cos x \sin x + \cos^3 x \sin x + \frac{\cos^5 x}{\sin x}\right)^2 - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \sin(9\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких y, при необходимости округлив её до двух знаков после запятой.

$\boxed{8058}$

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Решите систему

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^2\, \pi(x-y) + \mathrm{ctg}^2\, \pi(x-y) = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}} + 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 10. \end{cases}$$

$\boxed{\left(1, \frac{2n+5}{4}\right),\ n = -8, -7, \ldots, 3}$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2\cos^2 x + 4\sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi k\right),\ n, k \in \mathbb{Z}}$

17. (*«Ломоносов», 2008*) Решить уравнение

$$\sqrt{2} + \cos x = \left|\cos \frac{4x}{3}\right| \sin x.$$

$\boxed{\frac{3\pi}{4} + 6\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Найдите количество точек на координатной плоскости, через которые проходит как кривая $(3x - 4x^3)^{13} = 1 - (4y^3 - 3y)^{18}$, так и кривая $x^2 = 1 - y^2$.

$\boxed{9}$

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Найдите сумму первых ста положительных корней уравнения

$$\cos(8\pi x) + 2\cos(4\pi x) - \cos(2\pi x) + 2\sin(\pi x) + 3 = 0.$$

$\boxed{5050}$

20. (*МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2012*) Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$(\cos x + \cos y)(\sin x + \sin y) = 2.$$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right),\ \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right),\ k, n \in \mathbb{Z}}$

21. (*МГУ, ВМК, 2010*) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2\left(5x+\sin^2 y\right)+\left|\frac{5x+\cos 2y}{3}+\frac{3}{5x+\cos 2y}\right|=4\cos^2\frac{7\pi}{4}\,.$$

$\boxed{\left(\frac{2+2\pi}{15};\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{7-2\pi}{3}+\pi n\right),\ \left(-\frac{4+2\pi}{15};\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2\pi-5}{3}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}}$

22. (*МФТИ, 2005*) Решить уравнение

$$(5\sin x+12\cos x)(100+48\cos x-13\cos 2x)=1757.$$

$\boxed{\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

23. (*МФТИ, 2005*) Решить уравнение

$$(24\sin x+7\cos x)(75+28\cos x-25\cos 2x)=2598.$$

$\boxed{\arcsin\frac{24}{25}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

24. (*МГУ, ИСАА, 1993*) Решить уравнение:

$$\sin^2 x+3x^2\cos x+3x^2=0.$$

$\boxed{x=0;\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

25. (*МГУ, геологич. ф-т, 1983*) Решить систему:

$$\begin{cases}3\sin 3x+\cos y=-4,\\ x+y=\dfrac{3\pi}{2}\,.\end{cases}$$

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ y=\pi-2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

26. (*«Физтех», 2010*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin x-\sqrt{3}\cos y=\dfrac{5}{2}\,,\\ \sin y+\sqrt{2}\cos x=-\dfrac{3}{2}\,.\end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right);\ k,n\in\mathbb{Z}}$

27. (*МГУ, ВМК, 1992*) Решить уравнение:

$$\sqrt{1+\cos 6x}\,\sin\frac{3x}{2}=2\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{3}\,.$$

$\boxed{x=-\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}}$

28. (*МГУ, географич. ф-т, 1998*) Решить уравнение:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 + 3\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

29. (*МГУ, ф-т психологии, 1993*) Найти все корни уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.

$\boxed{-\frac{\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12}}$

30. (*МГУ, ф-т психологии, 1992*) Решить неравенство:

$$3\sin 2\pi x \geqslant \sqrt{2}\sin 4\pi x + 3\cos 2\pi x + \sqrt{32}\,.$$

$\boxed{x = \frac{3}{8} + n,\ n \in \mathbb{Z}}$

31. (*МГУ, химический ф-т, 1991*) Решить уравнение:

$$\cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x \cos 8x.$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

32. (*МГУ, экономич. ф-т, 1982*) Решить уравнение:

$$8\cos x\cos y\cos(x - y) + 1 = 0.$$

$\boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ y = \mp\frac{\pi}{3} + \pi(k - n),\ n, k \in \mathbb{Z}}$

33. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1981*) Решить уравнение:

$$\frac{3 + 2\cos(x - y)}{2} = \frac{\sin^2(x - y)}{2} + \sqrt{3 + 2x - x^2}\cos^2\frac{x - y}{2}\,.$$

$\boxed{x = 1,\ y = 1 + \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

34. (*МГУ, физический ф-т, 1984*) Решить систему:

$$\begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin 5\pi x + \sin\left(\pi(2y^2 - x)\right) - \sqrt{x(x-6) + 13}\cos\left(\pi\left(y^2 + 2x + \dfrac{1}{2}\right)\right) = 0. \end{cases}$$

$\boxed{x = 4 - \frac{y^2}{2},\ y \in \mathbb{R};\ x = \frac{n}{4} - 3 \pm \sqrt{\frac{10+n}{2}},\ y = 1 \mp \sqrt{\frac{10+n}{2}},\ n = -10, -9, \ldots}$

35. (*МГУ, ВМК, 1983*) Решить уравнение:

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5\pi^2}{4} = \sqrt{2 - |y|} \cdot \left(5\sin^2 x - 6\sin x \cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}\right).$$

$\boxed{x = -1,\ y = \pm 2}$

36. (*МГУ, ВМК, 1986*) Решить уравнение:

$$2\sqrt{3}\sin 5x - \sqrt{3}\sin x = \cos 24x \cos x + 2\cos 5x - 6.$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

37. (*МГУ, экономич. ф-т, 1990*) Найти все корни уравнения

$$\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2\pi x)}\cos(\pi x) + \sin(\pi x) = \sqrt{2}$$

на отрезке $[-3; 1]$.

$\boxed{-\frac{7}{4},\ \frac{1}{4}}$

38. (*МГУ, географич. ф-т, 2001*) Решить уравнение:

$$4\arcsin\left(2^x - 7\right) - \arccos\left(5^x - 124\right) = \frac{6\pi}{x}.$$

$\boxed{x = 3}$