

## Обратные тригонометрические функции

Перед этим листком следует повторить статью «[Введение в аркфункции](#)», в которой приводятся определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, а также графики этих функций и примеры решения простейших задач.

**ЗАДАЧА.** Докажите, что для любого  $x \in [-1; 1]$  справедливо равенство

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Пусть  $\alpha = \arcsin x$ ; это означает по определению, что  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  и  $\sin \alpha = x$ . Согласно основному тригонометрическому тождеству

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha,$$

и поскольку косинус неотрицателен на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , имеем отсюда

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Остаётся подставить сюда  $\alpha = \arcsin x$  и  $\sin \alpha = x$ :

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2},$$

что и требовалось.

**ЗАДАЧА.** Докажите, что

$$2 \operatorname{arctg} 2 + \arcsin \frac{4}{5} = \pi. \quad (1)$$

**РЕШЕНИЕ.** Обозначим левую часть (1) через  $\gamma = 2\alpha + \beta$ , где  $\alpha = \operatorname{arctg} 2$  и  $\beta = \arcsin \frac{4}{5}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}; \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{16}{9}} = 0.$$

Определим теперь интервал, в котором расположен угол  $\gamma$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 < \operatorname{arctg} 2 = \alpha < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi; \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \arcsin \frac{4}{5} = \beta < \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < 2\alpha + \beta < \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \gamma < \frac{4\pi}{3}.$$

Из полученной оценки и равенства  $\operatorname{tg} \gamma = 0$  заключаем, что  $\gamma = \pi$ . Равенство (1) тем самым доказано.

ЗАДАЧА. (МГУ, ВМК, 1999) Известно, что  $\operatorname{ctg} \alpha = 1$ . Сравнить

$$\arccos \left( -\sqrt{-\sqrt{2} \sin \alpha - \frac{1}{4}} \right) \quad \text{и} \quad \frac{19\pi}{24}.$$

РЕШЕНИЕ. Если  $\operatorname{ctg} \alpha = 1$ , то  $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$  или  $\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). В первом случае  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , что невозможно, так как под корнем оказывается отрицательное число. Во втором случае  $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , и тогда

$$\arccos \left( -\sqrt{-\sqrt{2} \sin \alpha - \frac{1}{4}} \right) = \arccos \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} \right) = \arccos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{24} > \frac{19\pi}{24}.$$

ОТВЕТ: Первое число больше.

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \operatorname{arcctg}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \quad \text{или} \quad \frac{5\sqrt{7}}{4}.$$

РЕШЕНИЕ. Пусть  $\alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ; тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Пусть также  $\beta = \operatorname{arcctg}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ ; тогда  $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$  и  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ . Имеем:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = -(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,  $\beta = \pi - \alpha$ , то есть  $\alpha + \beta = \pi$ . Остаётся сравнить  $\pi$  и  $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ . Имеем:

$$\frac{5\sqrt{7}}{4} = \sqrt{\frac{175}{16}} > \sqrt{\frac{168}{16}} = \sqrt{10,5} > \sqrt{10,24} = 3,2 > \pi.$$

ОТВЕТ: Второе число больше.

ЗАДАЧА. (МФТИ, 1991) Решить уравнение

$$\arcsin 5x = \operatorname{arcctg} 6x.$$

РЕШЕНИЕ. По определению арксинуса данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5x = \sin(\operatorname{arcctg} 6x), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcctg} 6x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку арккотангенс принимает значения от 0 до  $\pi$ , синус арккотангенса положителен:

$$\sin(\operatorname{arcctg} 6x) = +\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} 6x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 36x^2}}.$$

Поэтому система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} 5x = \frac{1}{\sqrt{1 + 36x^2}}, \\ \operatorname{arcctg} 6x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 \cdot 25x^4 + 25x^2 - 1 = 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Делая в полученном уравнении замену  $t = 5x^2$ , приходим к уравнению  $36t^2 + 5t - 1 = 0$ , корни которого  $t_1 = -\frac{1}{4}$  и  $t_2 = \frac{1}{9}$ . Корню  $t_1$  не соответствуют никакие значения  $x$ . Корень  $t_2$  даёт два значения  $x = \pm \frac{1}{3\sqrt{5}}$ , из которых годится только положительное.

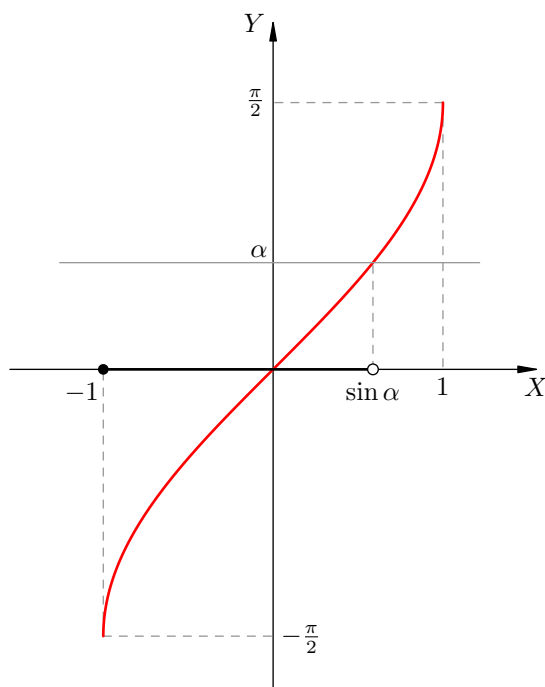
ОТВЕТ:  $\frac{1}{3\sqrt{5}}$ .

ЗАДАЧА. Для каждого значения параметра  $\alpha$  решите неравенство

$$\arcsin x < \alpha. \tag{3}$$

РЕШЕНИЕ. Множество значений арксинуса есть отрезок  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , поэтому если  $\alpha \leq -\frac{\pi}{2}$ , то неравенство (3) не имеет решений, а если  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , то неравенству удовлетворяют все  $x \in [-1; 1]$ .

Пусть теперь  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Имеется ровно одно значение  $x = \sin \alpha$ , для которого выполнено равенство  $\arcsin x = \alpha$ . Ввиду монотонного возрастания функции  $y = \arcsin x$  все решения неравенства (3) даются формулой  $-1 \leq x < \sin \alpha$  (см. рисунок).



ОТВЕТ: Если  $\alpha \leq -\frac{\pi}{2}$ , то решений нет; если  $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $-1 \leq x < \sin \alpha$ ; если  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , то  $-1 \leq x \leq 1$ .

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите неравенство

$$2 \arcsin(x + 1) + \arcsin(4x^2 + 8x + 4) < 0.$$

РЕШЕНИЕ. Делая замену  $t = -x - 1$  и пользуясь нечётностью арксинуса, приходим к неравенству

$$\arcsin 4t^2 < 2 \arcsin t. \tag{4}$$

Оба арксинуса определены при условиях

$$\begin{cases} 4t^2 \leq 1, \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

При полученных  $t$  имеем оценку  $-\frac{\pi}{3} \leq 2 \arcsin t \leq \frac{\pi}{3}$ , поэтому неравенство (4) равносильно неравенству (см. предыдущую задачу)

$$-1 \leq 4t^2 < \sin(2 \arcsin t) \Leftrightarrow 4t^2 < 2t\sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t(2t - \sqrt{1-t^2}) < 0.$$

Если  $t < 0$ , то оба множителя отрицательны и данное неравенство не имеет решений. При  $t > 0$  оно равносильно неравенству

$$2t - \sqrt{1-t^2} < 0 \Leftrightarrow 4t^2 < 1-t^2 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Поскольку  $\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ , интервал  $(0; \frac{1}{\sqrt{5}})$  является множеством решений неравенства (4). Остаётся сделать обратную замену:

$$0 < -x - 1 < \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow -\frac{5+\sqrt{5}}{5} < x < -1.$$

ОТВЕТ:  $(-\frac{5+\sqrt{5}}{5}; -1)$

В некоторых задачах фигурируют функции  $\arcsin(\sin x)$  и  $\arccos(\cos x)$ , свойства которых желательно знать до начала олимпиады.

**ЗАДАЧА.** Построить график функции  $y = \arcsin(\sin x)$ .

**РЕШЕНИЕ.** Каково бы ни было число  $x \in \mathbb{R}$ , наша функция сопоставляет ему такое число  $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , что  $\sin y = \sin x$ .

Если, например,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $y = x$ . В самом деле, равенство синусов углов на промежутке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  влечёт равенство самих углов.

Пусть, далее,  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ . Тогда из тождества  $\sin(\pi - x) = \sin x$  и оценки  $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$  получаем, что  $y = \pi - x$ .

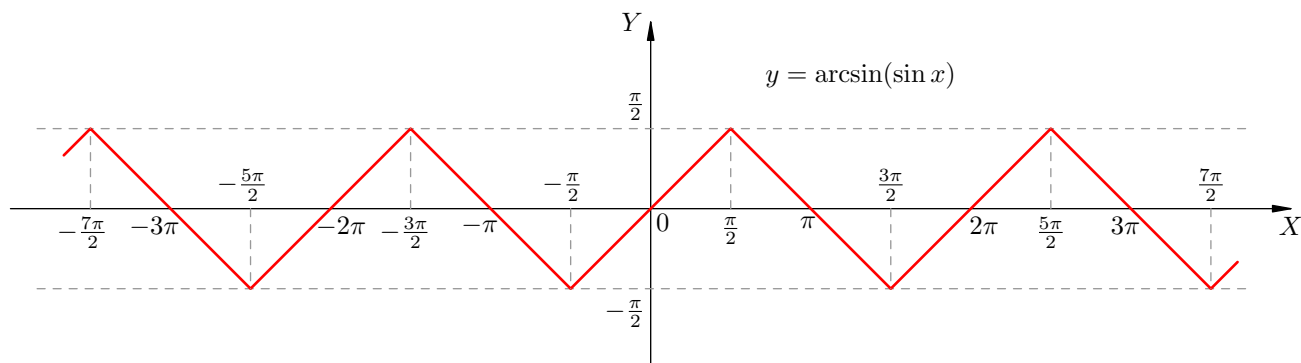
Вообще, пусть  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Тогда  $-\frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\sin(x - 2\pi n) = \sin x$ . Поэтому  $y = x - 2\pi n$ .

Далее, пусть  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ . Тогда  $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - (x - 2\pi n) \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\sin(\pi - x + 2\pi n) = \sin x$ . Поэтому  $y = \pi - x + 2\pi n$ .

Таким образом, имеем:

$$y = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ \pi - x + 2\pi n, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Данная функция является кусочно-линейной — её график составлен из отрезков прямых, угловые коэффициенты которых поочерёдно принимают значения 1 и  $-1$ . Этот график приведён на рисунке.



ЗАДАЧА. Построить график функции  $y = \arccos(\cos x)$ .

РЕШЕНИЕ. Любому числу  $x \in \mathbb{R}$  данная функция сопоставляет такое число  $y \in [0; \pi]$ , что  $\cos y = \cos x$ . Далее рассуждаем аналогично предыдущей задаче.

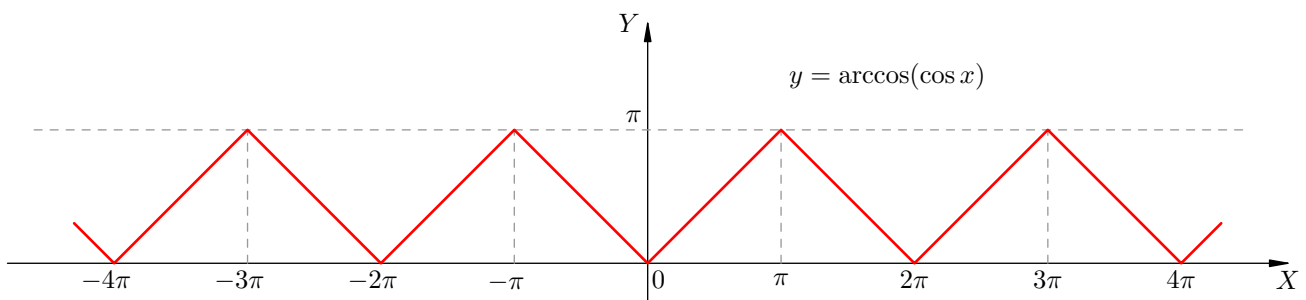
Если  $0 \leq x \leq \pi$ , то  $y = x$ , так как равенство косинусов на отрезке  $[0; \pi]$  влечёт равенство самих углов. Если  $\pi \leq x \leq 2\pi$ , то из тождества  $\cos(2\pi - x) = \cos x$  и оценки  $0 \leq 2\pi - x \leq \pi$  получаем  $y = 2\pi - x$ .

Вообще, если  $2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), то из оценки  $0 \leq x - 2\pi n \leq \pi$  и равенства  $\cos(x - 2\pi n) = \cos x$  получаем  $y = x - 2\pi n$ . Если же  $\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + 2\pi n$ , то соотношения  $0 \leq 2\pi - (x - 2\pi n) \leq \pi$  и  $\cos(2\pi - x + 2\pi n) = \cos x$  дают  $y = 2\pi - x + 2\pi n$ .

Итак,

$$y = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n; \\ 2\pi - x + 2\pi n, & \text{если } \pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + 2\pi n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

График этой функции изображён на рисунке.



Данный график можно получить сдвигом графика функции  $y = \arcsin(\sin x)$ , если воспользоваться тождеством

$$\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Выполните этот сдвиг самостоятельно, предварительно убедившись в справедливости приведённого тождества.

ЗАДАЧА. («Ломоносов», 2012) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\left| \arcsin(\cos 4) - \frac{\pi x}{2} \right| = 4.$$

РЕШЕНИЕ. С учётом неравенства  $\pi < 4 < 2\pi$  имеем:

$$\arcsin(\cos 4) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos 4) = \frac{\pi}{2} - (2\pi - 4) = 4 - \frac{3\pi}{2}.$$

Тогда наше уравнение переписывается в виде

$$\left| 4 - \frac{\pi(x+3)}{2} \right| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \frac{\pi(x+3)}{2} = 4, \\ 4 - \frac{\pi(x+3)}{2} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = \frac{16}{\pi} - 3. \end{cases}$$

Второй корень не является целым числом.

ОТВЕТ:  $x = -3$ .

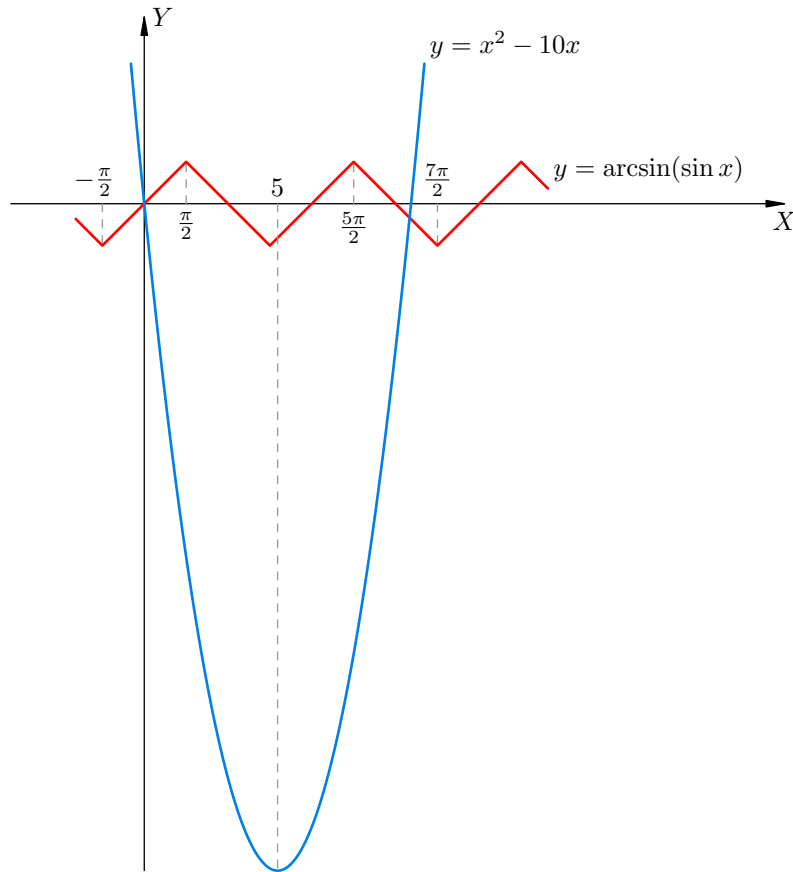
ЗАДАЧА. (МГУ, ВКНМ, 2000) Решите уравнение

$$x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x.$$

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 - 10x = \arcsin(\sin x)$$

и изобразим графики функций  $f(x) = x^2 - 10x$  и  $g(x) = \arcsin(\sin x)$ . Графическая картина прояснит нам, как строить дальнейшие рассуждения.



Рассмотрим промежуток  $I_1 = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Функция  $f(x)$  монотонно убывает при  $x \leq 5$  и, в частности, на  $I_1$ ; при этом  $f(-\frac{\pi}{2}) > 0$  и  $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ . Функция  $g(x)$  монотонно возрастает на  $I_1$  (поскольку  $g(x) = x$  на этом промежутке); при этом  $g(-\frac{\pi}{2}) < 0$  и  $g(\frac{\pi}{2}) > 0$ . Следовательно, уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет единственный корень на  $I_1$ . Легко проверить, что это  $x = 0$ .

Рассмотрим промежуток  $I_2 = [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$ . Функция  $f(x)$  монотонно возрастает при  $x \geq 5$  и, в частности, на  $I_2$ ; при этом  $f(\frac{5\pi}{2}) = \frac{5\pi}{2}(\frac{5\pi}{2} - 10) < 0$  и  $f(\frac{7\pi}{2}) = \frac{7\pi}{2}(\frac{7\pi}{2} - 10) > 0$ . Функция  $g(x)$  монотонно убывает на  $I_2$  (поскольку  $g(x) = 3\pi - x$  на этом промежутке); при этом  $g(\frac{5\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$  и  $g(\frac{7\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ . Следовательно, уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет единственный корень на  $I_2$ . Найдём его:

$$x^2 - 10x = 3\pi - x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9x - 3\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9 + \sqrt{81 + 12\pi}}{2}$$

(второй корень квадратного уравнения отрицателен и является посторонним).

Вне промежутков  $I_1$  и  $I_2$  уравнение  $f(x) = g(x)$  не имеет корней. В самом деле, если  $x < -\frac{\pi}{2}$ , то  $f(x) > f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} + 5\pi > \frac{\pi}{2}$ . Если  $x > \frac{7\pi}{2}$ , то  $f(x) > f(\frac{7\pi}{2}) = \frac{49\pi^2}{4} - 35\pi > \frac{\pi}{2}$ . Если же

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ , то  $f(x) < f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{25\pi^2}{4} - 25\pi < -\frac{\pi}{2}$ . Следовательно, во всех этих случаях  $f(x)$  не может равняться  $g(x)$ .

ОТВЕТ:  $0; \frac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$ .

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin x} \leq \sqrt{\arccos y}.$$

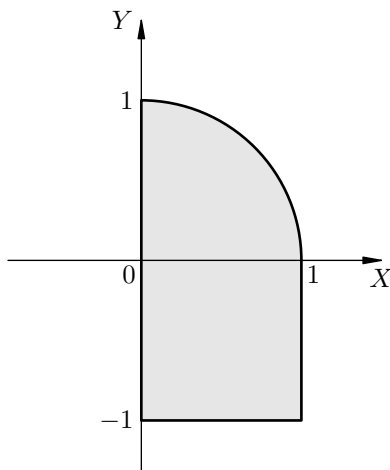
РЕШЕНИЕ. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \arcsin x \geq 0, \\ \arcsin x \leq \arccos y. \end{cases} \quad (5)$$

Множеством решений первого неравенства (5) является отрезок  $0 \leq x \leq 1$ . Если  $y \in [-1; 0]$ , то  $\frac{\pi}{2} \leq \arccos y \leq \pi$ , и тогда второе неравенство (5) выполнено при всех  $x \in [0; 1]$ . Если же  $y \in [0; 1]$ , то  $0 \leq \arccos y \leq \frac{\pi}{2}$ , и тогда при  $x \in [0; 1]$  второе неравенство (5) равносильно

$$x \leq \sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

В результате имеем объединение квадрата и четверти круга (см. рисунок).



Сторона квадрата и радиус круга равны 1, поэтому искомая площадь равна  $1 + \frac{\pi}{4}$ .

## Задачи

1. Докажите, что для любого  $x \in [-1; 1]$  справедливо равенство

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

2. Докажите равенства

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos(\operatorname{arctg} x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{б) } \sin(\operatorname{arctg} x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \text{в) } \operatorname{tg}(\arcsin x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1); & \text{г) } \operatorname{tg}(\arccos x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1]. \end{aligned}$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(2x) + \arccos(2x) \geq \frac{\pi}{4} \cdot (y^2 - 2).$$

4

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Маше нужно было вычислить значение выражения  $\sin(2 \arccos \alpha)$  при заданном значении  $\alpha$ . Однако Маша по невнимательности вычислила значение выражения  $\cos(2 \arcsin \alpha)$ , но при том же значении  $\alpha$ , причём вычислила верно. Оказалось, что Машин ответ совпал с правильным ответом для исходного выражения. Каким при этом могло быть число  $\alpha$  (укажите все возможные значения)?

$$\frac{2}{2^{\wedge}+2^{\wedge}}; \frac{2}{2^{\wedge}-2^{\wedge}}$$

5. Докажите, что

$$\text{а) } 2 \operatorname{arctg} 4 + \arccos \frac{15}{17} = \pi; \quad \text{б) } 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

6. (МГУ, мехмат, 1999, устный экз.) Вычислить

$$\operatorname{arctg} 8 + \operatorname{arctg} \frac{19}{22} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{2}\right).$$

2  
π3

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Вычислите

$$\operatorname{tg} \left( \operatorname{arctg} \frac{2-1}{2^3-1} + \operatorname{arctg} \frac{3-1}{3^3-1} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{100-1}{100^3-1} \right).$$

203  
69

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Решите уравнение

$$\left( \arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{4}{5} \right) \cdot x + \pi = 2 \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

x ∈ ℝ

9. (МГУ, ВМК, 1999) Известно, что  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ . Сравнить

$$\arccos \left( -\sqrt{-3 \cos \alpha - 1} \right) \quad \text{и} \quad \frac{19\pi}{24}.$$

Второе число больше



10. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{3} + 2) + \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 2) \quad \text{или} \quad \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Первое число больше

11. («Ломоносов», 2016) Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{arctg}^2 x = 3 \operatorname{arctg} x + \frac{\pi^2}{36}.$$

$\frac{\pi}{6}$

12. (ММО, 2016, 11) Существует ли такое значение  $x$ , что выполняется равенство

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1?$$

Нет

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Что больше:  $2 \sin \frac{5\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}$  или сумма корней уравнения  $|3 \arccos x| = |\arcsin x|$ ?

Первое число больше

14. (МГУ, ВМК, 2005) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos \frac{x+y}{4} = \arccos \frac{5xy}{24}, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

$\left(\frac{01}{18E\wedge-31-}, \frac{01}{18E\wedge+31-}\right); \left(\frac{01}{18E\wedge+31-}, \frac{01}{18E\wedge-31-}\right)$

15. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005) Решите уравнение

$$\sin(\sqrt{3} \arcsin x) = 1.$$

$\frac{9}{\pi^2}$

16. (МГУ, ИСАА, 2002) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos 2y + \arcsin 3x = \frac{\pi}{4}, \\ \arcsin 2y \cdot \arccos 3x = \frac{5\pi^2}{64}. \end{cases}$$

Для каждого решения  $(x, y)$  определите, какое из чисел больше:  $2y - 3x$  или  $\sqrt[4]{2} - 0,5$ .

Первое число больше:  $\left(\frac{4}{2\wedge-2\wedge}, \frac{9}{2\wedge-2\wedge}\right)$

17. (МФТИ, 1991) Решить уравнение

а)  $2 \arcsin 2x = \arccos 7x$ ;

б)  $\operatorname{arctg} 3x = \arccos 8x$ .

$$\left[ \frac{\pi}{1} \wedge \frac{9}{1} \right] \left( \frac{8}{1} ; \frac{8}{1} \right) \left( \mathbb{R} \right)$$

18. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

а)  $\operatorname{arctg} \frac{1-x}{3x} + \arcsin 3x = \frac{\pi}{2}$ ;

б)  $\operatorname{arccotg} \frac{1-x}{2x} + \arccos 2x = \frac{\pi}{2}$ .

$$\left[ \frac{\pi}{2} \right] \left( \frac{8}{1} ; \frac{8}{1} \right) \left( \mathbb{R} \right)$$

19. При всех значениях параметра  $\alpha$  решите неравенство  $\arcsin x \geq \alpha$ .

$$\left[ \text{Если } \alpha \leq -\frac{\pi}{2}, \text{ то } -1 \leq x \leq 1; \text{ если } \alpha \geq \frac{\pi}{2}, \text{ то } -\frac{\pi}{2} < x \leq 1; \text{ если } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \sin \alpha \leq x \leq 1; \text{ если } \alpha > \frac{\pi}{2}, \text{ то решение нет} \right]$$

20. При всех значениях параметра  $\alpha$  решите неравенство  $\arccos x \leq \alpha$ .

$$\left[ \text{Если } \alpha > 0, \text{ то решение нет; если } 0 \leq \alpha \leq \pi, \text{ то } \cos \alpha \leq x \leq 1; \text{ если } \alpha < \pi, \text{ то } -1 \leq x \leq 1 \right]$$

21. (МГУ, химич. ф-т, 2008) Решите неравенство

$$\arccos 3x \leq \arccos \sqrt{6-15x}.$$

$$\left[ \frac{8}{1} \right]$$

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2019) При всех значениях  $a \in \mathbb{R}$  решите неравенство

$$\arccos \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) + (x-a)^2 \leq 2 \operatorname{arctg} x.$$

$$\left[ \text{при } a = x \text{ решение одно } 0 \leq v \text{ или } \text{нет, при } a \neq x \text{ есть одно решение } 0 > v \text{ или } \text{нет} \right]$$

23. (МГУ, ВМК, 2002) Решите неравенство

$$2 \cos(\arcsin x) - \sin \left( \frac{1}{2} \arccos x \right) \leq 0.$$

$$\left[ \{1\} \cap \left[ \frac{8}{2} - ; 1 - \right] \right]$$

24. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите неравенство

а)  $\arcsin(6x^2 - 12x + 6) + 2 \arcsin(x - 1) < 0$ ;

б)  $2 \arcsin(x + 1) + \arccos(3x^2 + 6x + 2) < 0$ .

$$\left[ \left( \frac{8}{01 \wedge + 8} - ; \frac{8}{9 \wedge + 8} - \right] \right] \left( \frac{8}{1} ; \left( 1 ; \frac{01}{01 \wedge - 01} \right) \right) \left( \mathbb{R} \right)$$

25. (МГУ, ВМК, 1996) Решите неравенство

$$\arccos 3x + \arcsin(x + 1) \leq \frac{7\pi}{6}.$$

$$\left[0; \frac{9\pi}{8\sqrt{2}-8}\right]$$

26. («Ломоносов», 2018, 10–11) Решите неравенство

$$\arcsin\left(\frac{5}{2\pi} \arccos x\right) > \arccos\left(\frac{10}{3\pi} \arcsin x\right).$$

$$\left[\frac{0\pi}{x\pi}; \frac{0\pi}{x6} \pi\right] \cap \left(\frac{0\pi}{x6} \pi; \frac{0\pi}{x} \pi\right]$$

27. («Ломоносов», 2012) Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} \geq \arcsin(x^2 - 2x - 4).$$

⊠

28. («Ломоносов», 2012) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\left|\arccos(\sin 6) - \frac{\pi x}{2}\right| = 6.$$

⊠

29. (МГУ, ВКНМ, 2000) Решите уравнение

$$\arccos(\cos x) = x^2 + 10x.$$

$$\frac{\pi}{x^2+10x-6} = 0$$

30. («Ломоносов», 2015, 10–11) Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = (\arcsin(\sin(\arccos(\cos 3x))))^{-5}.$$

⊠

31. (ОММО, 2018) Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости  $Oxy$  множество решений неравенства

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x)) \left(y^2 - \arcsin^2\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)\right) \left(y^2 - \arcsin^2\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)\right) < 0.$$

32. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найти наибольшее значение выражения

$$2 \arccos(\sin(x - 2y - 1)) + x - y + 2$$

при  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

ε + 2Z

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin y} \leq \sqrt{\arccos x}.$$

$\frac{\pi}{x} + 1$

34. («Ломоносов», 2014) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin \frac{x}{5}} \leq \sqrt{\arccos \frac{y}{5}}.$$

В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

45

35. (МГУ, экономич. ф-т, 1993) Найдите периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x - 2| \arcsin((y + 1)^2) \leq \pi(2 - x), \\ 2|y + 1| + x \geq 0. \end{cases}$$

$\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}$

36. (МГУ, географич. ф-т, 2001) Решите уравнение

$$4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

ε

37. (МГУ, экономич. ф-т, 1999) Решить уравнение

$$x + \frac{1}{6} \arccos(\cos 15x + 2 \cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

$\frac{\pi x}{x} : \frac{9x}{x} -$

38. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Укажите целое число, ближайшее к меньшему из корней уравнения

$$\operatorname{arctg} \left( \left( \frac{5x}{26} + \frac{13}{10x} \right)^2 \right) - \operatorname{arctg} \left( \left( \frac{5x}{26} - \frac{13}{10x} \right)^2 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

ε-

39. («Покори Воробьёвы горы!», 2019) Решите неравенство

$$\arcsin(\sin |x|) \geq \arccos |\cos 2x|.$$

$$\dots \text{ 'т '0} = \mathcal{A} \left[ \mathcal{A} \mathcal{A} \mathcal{Z} - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{A}} - \mathcal{A} \mathcal{A} \mathcal{Z} - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{A} \mathcal{Z}} \right] \cap \left[ \mathcal{A} \mathcal{A} \mathcal{Z} + \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{A} \mathcal{Z}} \mathcal{A} \mathcal{A} \mathcal{Z} + \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{A}} \right] \cap \{ \mathcal{A} \mathcal{A} \mathcal{A} \} \ni x$$

40. («Ломоносов», 2014) Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \sqrt{35\pi^2 + 4\pi x - 4x^2} \right) = \arcsin \left( \sin \sqrt{\frac{35\pi^2}{4} + \pi x - x^2} \right).$$

ЭГ

41. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Выясните, сколько корней имеет уравнение

$$\left( 21x - 11 + \frac{\sin x}{100} \right) \cdot \sin(6 \arcsin x) \cdot \sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0.$$

иэндюя 2

42. («Ломоносов», 2011) Функция  $y = f(t)$  такова, что сумма корней уравнения  $f(\cos x) = 0$  на отрезке  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$  равна  $17\pi$ , а сумма корней уравнения  $f(\sin x) = 0$  на отрезке  $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$  равна  $29\pi$ . Какова сумма корней второго уравнения на отрезке  $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ ?

43Г

43. («Ломоносов», 2010) Проекция некоторой кривой в координатном пространстве на плоскости  $Oxz$  и  $Oyz$  удовлетворяют уравнениям  $5x + \cos z = 0$  и  $z = \operatorname{arctg} \sqrt{y - 3}$  соответственно. Найдите функцию  $y = f(x)$ , график которой состоит из тех и только тех точек, которые могли бы при этих условиях служить проекциями точек той же кривой на плоскость  $Oxy$ .

$$\left( 0; \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{A}} \right] \ni x \text{ илн } \mathcal{Z} + \frac{\mathcal{E} \mathcal{A} \mathcal{G} \mathcal{Z}}{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$$

44. (МГУ, экономич. ф-т, 2005) Фигура  $F$  задаётся на координатной плоскости неравенством

$$\frac{3\pi^2 - 2 \arcsin \left( \frac{y-x+9}{13} \right) \cdot \arccos \left( \frac{10+2x+2y}{18} \right)}{|x-4| \cdot \left( \left| \sqrt{9\sqrt{128} - 97} + x \right| + |y+5| \right)} \geq 0.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих  $F$ ?

(49Г'0)