

Углы в тригонометрии

При решении геометрических задач мы обычно имеем дело с углами, находящимися в пределах от 0 до 180° . В тригонометрии ситуация иная: здесь рассматриваются углы произвольной величины (как по модулю, так и по знаку). Данная статья посвящена изучению углов, величина которых может быть любым действительным числом¹.

Угол, как вы знаете, образуется двумя лучами с общим началом. Рассмотрим два луча: *неподвижный луч* ON и *подвижный луч* OP (рис. 1). Неподвижный луч фиксирован; подвижный луч может вращаться вокруг точки O .

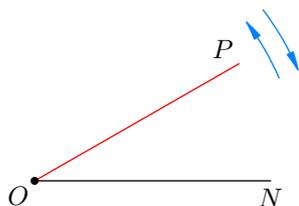


Рис. 1. Неподвижный и подвижный лучи

Повороты подвижного луча могут совершаться в двух направлениях: против часовой стрелки (положительное направление) и по часовой стрелке (отрицательное направление).

Будем говорить, что подвижный луч занимает *начальное положение*, если он совпадает с неподвижным лучом. Начальному положению подвижного луча соответствует *нулевой угол*.

Каждому повороту подвижного луча из начального положения отвечает некоторый угол. Этот угол считается положительным, если поворот совершён против часовой стрелки, и отрицательным в случае поворота по часовой стрелке (рис. 2).

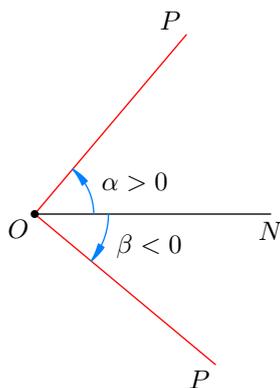


Рис. 2. Положительный и отрицательный углы

Как видите, углы отсчитываются от неподвижного луча в положительном и отрицательном направлениях. Ясно, что по мере движения подвижного луча от начального положения абсолютная величина угла возрастает. Нам нужно обсудить теперь, в каких единицах измеряются углы.

¹Углы произвольной величины важны не только в математике, но и в физике: фаза колебаний, например, может принимать какое угодно значение от $-\infty$ до $+\infty$.

Градусная мера угла

Предположим, что подвижный луч совершил из начального положения один полный оборот в положительном направлении и снова совпал с неподвижным лучом. В таком случае мы говорим, что получился *положительный полный угол* (или просто *полный угол*). Величина полного угла по определению считается равной 360° (рис. 3, слева).

Точно так же при полном обороте подвижного луча в отрицательном направлении получается *отрицательный полный угол*, равный -360° (рис. 3, справа).



Рис. 3. Полный угол

Таким образом, угол 1° — это угол, равный $1/360$ части полного угла².

Если подвижный луч совершил половину полного оборота, то получается *развёрнутый угол* (положительный или отрицательный), равный 180° или -180° в зависимости от направления поворота (рис. 4).

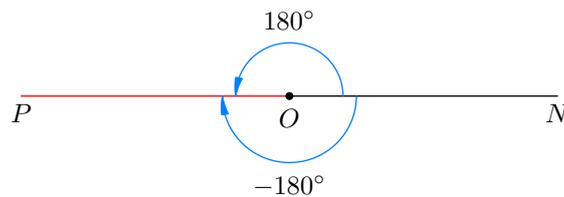


Рис. 4. Развёрнутый угол

Если подвижный луч совершил четверть полного оборота, то получается *прямой угол* (положительный или отрицательный), равный 90° или -90° в зависимости от направления поворота (рис. 5, слева). Если подвижный луч совершил три четверти полного оборота, то получается *тройной прямой угол*, равный 270° или -270° в зависимости от направления поворота (рис. 5, в центре и справа).

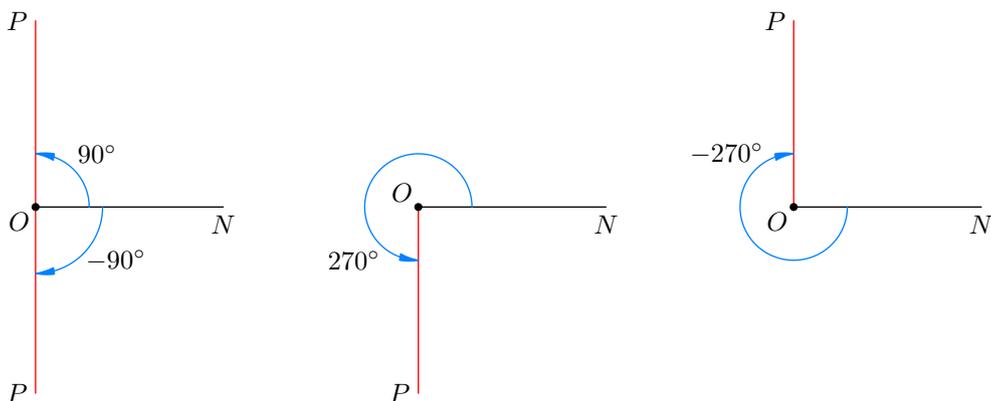


Рис. 5. Прямой угол и тройной прямой угол

Пока мы рассмотрели углы, отвечающие долям полного оборота подвижного луча (а именно, половине, четверти и трём четвертям). Но ясно, что одним-единственным оборотом дело не

²В геометрии угол 1° определяется как $1/180$ часть развёрнутого угла. Ясно, что это ничем не отличается от нашего «тригонометрического» определения градуса.

ограничивается. Подвижный луч может совершить какое угодно количество оборотов, и это даёт возможность рассматривать углы произвольной величины.

Так, на рис. 6 подвижный луч совершил два полных оборота в положительном направлении. Получился двойной полный угол, равный $360^\circ \cdot 2 = 720^\circ$.

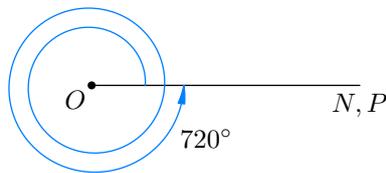


Рис. 6. Угол 720°

На рис. 7 показан угол, равный -1100° .

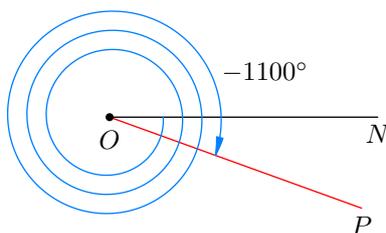


Рис. 7. Угол -1100°

Понятно, как этот угол получился? Совершились три полных оборота в отрицательном направлении ($-360^\circ \cdot 3 = -1080^\circ$) и, сверх того, дополнительный поворот на -20° .

Радиянная мера угла

Для измерения угловой величины используются не только градусы, но и радианы. Во многих ситуациях радианная мера угла естественнее и удобнее, чем градусная.

Давайте посмотрим на рис. 8.

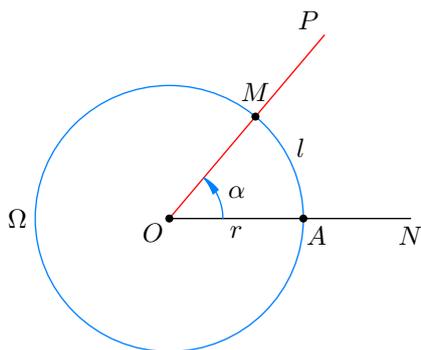


Рис. 8. К определению радианной меры угла

Изображена окружность Ω радиуса r с центром в точке O . Эта окружность пересекает неподвижный луч в точке A , а подвижный луч — в точке M . Таким образом, при вращении подвижного луча точка M перемещается по окружности Ω ; начальным положением точки M служит точка A .

При повороте подвижного луча на угол α точка M описывает дугу AM . Пусть l — длина этой дуги. Тогда радианная мера угла α определяется следующим образом:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{l}{r} & \text{при повороте в положительном направлении,} \\ -\frac{l}{r} & \text{при повороте в отрицательном направлении.} \end{cases} \quad (1)$$

Нетрудно понять, что величина α определена корректно, то есть не зависит от выбора окружности Ω . В самом деле, если радиус r изменится в некоторое количество раз, то длина l дуги AM изменится в такое же количество раз, и потому отношение l/r останется неизменным.

Сейчас мы на конкретных примерах убедимся, что радианная мера угла не зависит от выбранного радиуса r .

Давайте выясним, чему равен полный угол в радианах. Если подвижный луч совершает один полный оборот, то точка M пробегает всю окружность Ω . Длина окружности:

$$l = 2\pi r,$$

поэтому согласно определению (1) получаем:

$$\text{полный угол} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi. \quad (2)$$

(Именно так — без указания на единицу измерения — записывается значение угловой величины в радианах. Например, запись $\alpha = 30$ будет означать угол в 30 радиан. Поэтому будьте внимательны: записывая угол в градусах, не забывайте ставить значок градуса!)

Как видите, радиус r сократился в ходе вычислений — величина полного угла от выбора r действительно не зависит и оказывается равной 2π .

Положительный полный угол и отрицательный полный угол, выраженные в радианах, показаны на рис. 9.



Рис. 9. Полный угол в радианах

Развёрнутый угол равен половине полного угла, поэтому радианная мера положительного развёрнутого угла равна π . Положительный и отрицательный развёрнутые углы, выраженные в радианах, показаны на рис. 10.

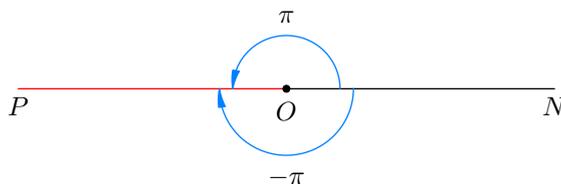


Рис. 10. Развёрнутый угол в радианах

Прямой угол равен половине развёрнутого угла, поэтому радианная мера положительного прямого угла равна $\pi/2$.

Умножив $\pi/2$ на три, получим радианную меру положительного тройного прямого угла: она равна $3\pi/2$.

Прямой угол и тройной прямой угол (положительные и отрицательные), выраженные в радианах, показаны на рис. 11.

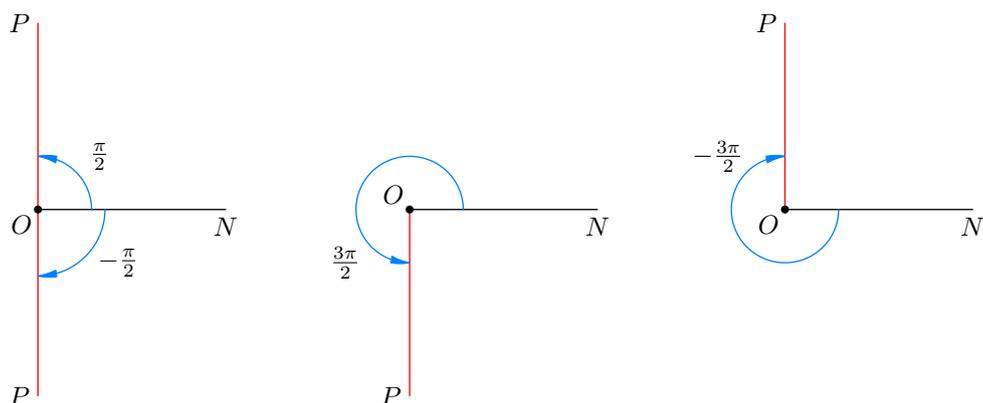


Рис. 11. Прямой угол и тройной прямой угол в радианах

Что же такое угол 1 радиан? Согласно определению (1) угол, равный 1, получается при $l = r$. Стало быть, при повороте подвижного луча на 1 радиан точка M проходит дугу, равную радиусу окружности Ω (рис. 12).

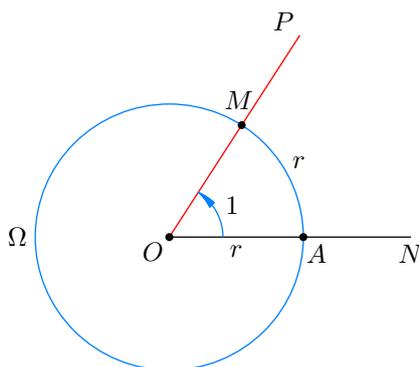


Рис. 12. Угол 1 радиан

Иными словами, в случае угла 1 радиан сектор AOM оказывается «равносторонним».

Связь градусной и радианной мер

Как мы уже выяснили, полный угол равен 360° или 2π радиан. Отсюда получаем первую формулу, связывающую градусную и радианную меры:

$$360^\circ = 2\pi. \tag{3}$$

Иллюстрацией полученного равенства являются рисунки 3 и 9.

Разделив обе части формулы (3) на 2, получим угловую величину развёрнутого угла в градусах и радианах:

$$180^\circ = \pi. \tag{4}$$

Иллюстрацией данного равенства служат рисунки 4 и 10.

Далее, разделив обе части формулы (4) на 2, получим угловую величину прямого угла в градусах и радианах:

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Умножив обе части формулы (5) на 3, получим угловую величину тройного прямого угла в градусах и радианах:

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2}. \quad (6)$$

Иллюстрацией равенств (5) и (6) служат рисунки 5 и 11.

Выведем ещё ряд формул, связывающих градусные и радианные меры некоторых часто встречающихся углов.

Разделим на 3 обе части формулы (4):

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}. \quad (7)$$

Разделим обе части полученной формулы на 2:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}. \quad (8)$$

Разделим на 2 обе части формулы (5):

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}. \quad (9)$$

Умножим на 2 обе части формулы (7):

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}. \quad (10)$$

Умножим на 3 обе части формулы (9):

$$135^\circ = \frac{3\pi}{4}. \quad (11)$$

Умножим на 5 обе части формулы (8):

$$150^\circ = \frac{5\pi}{6}. \quad (12)$$

Формулы (3)–(12) исключительно важны и неоднократно встретятся нам в дальнейшем.

Сколько градусов составляет один радиан? Как мы знаем из формулы (4), угол π радиан равен 180° . Следовательно,

$$1 = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ. \quad (13)$$

(Напомним ещё раз, что при указании угла в радианах ставится одно только число, без дальнейшего дописывания «радиан» или «рад». Поэтому число 1 в левой части последней формулы как раз и означает один радиан.)

Из формулы (4) также следует, что угол 1° составляет $1/180$ часть от π (радиан):

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}. \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) позволяют легко переходить от градусов к радианам и обратно.

Пример. Выразить в радианах угол 80° .

Решение. С помощью формулы (14) имеем:

$$80^\circ = 80 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}.$$

Пример. Выразить в градусах угол $2\pi/5$.

Решение. Здесь проще всего воспользоваться тем, что $\pi = 180^\circ$:

$$\frac{2\pi}{5} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Пример. Выразить в градусах угол $5/9$.

Решение. С помощью формулы (13) получаем:

$$\frac{5}{9} = \frac{5}{9} \cdot 1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \left(\frac{100}{\pi}\right)^\circ.$$

Задачи

1. Пусть ON — неподвижный луч, OP — подвижный луч. Изобразите (приблизительно) углы: а) 70° ; б) 130° ; в) 200° ; г) 290° ; д) 400° ; е) 500° ; ж) 600° ; з) 1000° ; и) 2000° .

2. Изобразите (приблизительно) углы: а) -40° ; б) -140° ; в) -220° ; г) -300° ; д) -700° ; е) -3000° .

3. Изобразите (приблизительно) углы: а) $\pi/5$; б) $-2\pi/5$; в) $3\pi/5$; г) $-4\pi/5$; д) $6\pi/5$; е) $-7\pi/5$; ж) $8\pi/5$; з) $-9\pi/5$.

4. Изобразите множество углов, вычисляемых по формуле: а) $2\pi n$; б) πn ; в) $2\pi n/3$; г) $\pi n/2$; д) $2\pi n/5$; е) $\pi n/3$, где $n \in \mathbb{Z}$.

5. Найдите радианную меру угла: а) 10° ; б) 15° ; в) 18° ; г) 40° ; д) 75° ; е) 144° ; ж) 300° .

$$\frac{\pi}{18} \text{ (ж); } \frac{\pi}{12} \text{ (а); } \frac{\pi}{10} \text{ (г); } \frac{\pi}{12} \text{ (в); } \frac{\pi}{18} \text{ (д)}$$

6. Найдите градусную меру угла: а) $\pi/5$; б) $\pi/8$; в) $7\pi/9$; г) $4\pi/3$; д) $11\pi/6$; е) $9\pi/4$; ж) $100\pi/3$.

$$20^\circ \text{ (ж); } 45^\circ \text{ (а); } 140^\circ \text{ (г); } 22,5^\circ \text{ (в); } 67,5^\circ \text{ (д)}$$

7. Найдите, на какой угол (в радианах) поворачивается минутная стрелка часов за: а) 5 мин; б) 10 мин; в) 15 мин; г) 20 мин; д) 25 мин; е) 30 мин; ж) 45 мин; з) 1 ч; и) сутки; к) 2 ч 50 мин.

$$\frac{\pi}{12} \text{ (а); } \frac{\pi}{6} \text{ (б); } \frac{\pi}{4} \text{ (в); } \frac{\pi}{3} \text{ (г); } \frac{\pi}{2} \text{ (д); } \frac{\pi}{4} \text{ (е); } \frac{\pi}{2} \text{ (ж); } \frac{\pi}{2} \text{ (з); } \frac{\pi}{2} \text{ (и); } \frac{\pi}{2} \text{ (к)}$$

8. Подвижный луч совершил поворот на угол: а) $\varphi = 14\pi/3$; б) $\varphi = -33\pi/5$. Найдите угол α из промежутка $[0; 2\pi]$ такой, что поворот подвижного луча на угол α совпадает с поворотом подвижного луча на угол φ .

$$\frac{\pi}{3} \text{ (а); } \frac{\pi}{5} \text{ (б)}$$

9. Стержень OA длиной 30 см вращается вокруг точки O с угловой скоростью 2 рад/с. Найдите путь, пройденный точкой A за одну минуту.

$$6\pi \text{ м}$$

10. Найдите угловую скорость секундной стрелки часов.

$$\frac{\pi}{30} \text{ рад/с}$$