Треугольник XYZ

В задачах с двумя окружностями может помочь вспомогательный треугольник, который обычно нужно дополнительно строить (поэтому мы и называем его условно XYZ). Располагаться он может по-разному, но одна из его сторон — отрезок, соединяющий центры окружностей (или параллельно сдвинутый такой отрезок).

Задача 1. Окружности радиусами R и r касаются внешним образом. Найдите длину отрезка их общей касательной.

$\boxed{2\sqrt{Rr}}$

Задача 2. (*problems.ru, 52889*) Радиусы двух окружностей равны 27 и 13, а расстояние между центрами равно 50. Найдите длины их общих касательных.

$\boxed{48 \text{ и } 30}$

Задача 3. (*problems.ru, 53084*) Две окружности радиусов 5 и 3 касаются внутренним образом. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении $3:1$. Найдите длину этой хорды.

$\boxed{8}$

Задача 4. (*ЕГЭ, 2013*) Окружности радиусов 1 и 4 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C. AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$. Найдите AB.

$\boxed{5 \text{ или } 7}$

Задача 5. (*«Физтех», 2012.4*) Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью — A и B, с большей окружностью — C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = 24/5$, $AC = 12$.

$\boxed{3 \text{ и } 12}$

Задача 6. (*«Физтех», 2023, 10*) Окружности Ω и ω радиусов 5 и 3 соответственно касаются друг друга внутренним образом в точке T. Прямая ℓ пересекает окружность ω в точках B и C, а окружность Ω — в точках A и D, причём B лежит между A и C, C лежит между B и D, а центры окружностей лежат по одну сторону от ℓ. Известно, что $AB : BC : CD = 1 : 4 : 7$. Найдите AC^2. При необходимости округлите ответ до трёх знаков после запятой.

$\boxed{\frac{820}{77} \approx 10{,}649}$

Задача 7. (*«Физтех», 2023, 11*) Окружности Ω и ω радиусов 5 и 4 соответственно касаются друг друга внешним образом в точке T. Прямая ℓ пересекает окружность ω в точках A и B, а окружность Ω — в точках C и D, причём B лежит между A и C, C лежит между B и D, а центры окружностей лежат по одну сторону от ℓ. Известно, что $AB : BC : CD = 4 : 1 : 6$. Найдите BC^2. При необходимости округлите ответ до трёх знаков после запятой.

$\boxed{\frac{864}{385} \approx 2{,}244}$