Теорема Турана

Теорема Турана — основополагающий результат *экстремальной теории графов*. Что это за наука? Процитируем начало анонса лекции, которую прочитал 28 октября 2015 года в МФТИ крупный венгерский математик Миклош Шимонович.

> В МФТИ на первый курс поступает множество студентов, и они начинают знакомиться друг с другом: появляются всё новые и новые пары знакомых. В какой-то момент возникают тройки попарно знакомых людей, компании знакомых из четырёх человек и т. д. Можно задаться вопросом: а *сколько пар* студентов достаточно перезнакомить так, чтобы *гарантированно появилась тройка* попарно знакомых? В терминах теории графов: *сколько рёбер* нужно провести в графе, чтобы в нём *гарантированно возникла клика* на трёх вершинах? Подобными вопросами о плотностях графов как раз и занимается в первую очередь экстремальная теория графов.

Теорема Турана в терминах числа независимости

Мы начнём со следующего вопроса. Пусть имеется граф G с n вершинами и числом независимости α. Сколько у него может быть рёбер?

Заметим, что при фиксированном n величина α может принимать любое значение от 1 (для полного графа) до n (для графа без рёбер). Интуитивно понятно, что с увеличением α число рёбер должно уменьшаться, поскольку растут размеры независимых множеств (в которых рёбра отсутствуют). Существует ли какая-либо оценка на число рёбер e в зависимости от значений величин n и α? Ответ на этот вопрос утвердительный.

1. Выделим в нашем графе G независимое множество M максимальной мощности α. Удалим из графа все вершины, принадлежащие M, вместе с исходящими из них рёбрами. Покажите, что из графа при этом удалилось не менее $n - \alpha$ рёбер.

Пусть G_1 — граф, получившийся из G после удаления M. Выделим в G_1 максимальное по мощности независимое множество M_1 и удалим его вместе со всеми исходящими из него рёбрами. Будем так продолжать до тех пор, пока не исчерпаются рёбра.

2. Предположим вначале, что n делится на α. Докажите, что

$$e \geqslant \frac{n(n-\alpha)}{2\alpha}\,.$$

Докажите также, что оценка точна, предъявив граф, для которого достигается равенство.

Теперь обобщим задачу и докажем первый вариант теоремы Турана.

3. (*Теорема Турана в терминах числа независимости*) Каков бы ни был граф на n вершинах с числом независимости α, для количества его рёбер справедливо неравенство

$$e \geqslant \frac{(n-r)(n+r-\alpha)}{2\alpha}\,, \tag{1}$$

где r — остаток от деления n на α (то есть $n = q\alpha + r$, $0 \leqslant r \leqslant \alpha - 1$). Оценка (1) неулучшаема на множестве всех графов с данными значениями n и α.

Экстремальный граф состоит из $\alpha - r$ компонент K_q и r компонент K_{q+1}

4. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) а) Есть $2n+1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

б) Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причём хороших и плохих поровну.

а) $n+2$; б) $n+3$

Мы подчеркнули, что оценка (1) неулучшаема на множестве *всех* графов с количеством вершин n и числом независимости α. Если же мы вдобавок располагаем какой-то ещё информацией о структуре графа, то турановская оценка может быть улучшена.

5. (*ММО, 2010, 10*) На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $n+1$ точек обязательно есть две, соединённые отрезком. Докажите, что всего проведено не менее $7n$ отрезков.

Теорема Турана в терминах запрещённых подграфов

Давайте вернёмся к вопросу из анонса лекции: сколько пар студентов достаточно перезнакомить так, чтобы гарантированно появилась тройка попарно знакомых?

6. Граф G не содержит треугольников. Каково число независимости графа $\overline{G}$?

1 или 2

7. Граф G не содержит треугольников и имеет чётное число $n = 2q$ вершин. Докажите, что число его рёбер удовлетворяет неравенству

$$e \leqslant \frac{n^2}{4}\,.$$

Приведите пример графа, для которого в данной оценке достигается равенство.

Указание. Примените к дополнительному графу $\overline{G}$ теорему Турана в терминах числа независимости.

Экстремальный граф есть $K_{q,q}$

8. На первый курс ФИВТ МФТИ принято 100 человек. Сколько пар первокурсников достаточно перезнакомить так, чтобы гарантированно появилась тройка попарно знакомых?

2501

9. Граф не содержит треугольников и имеет нечётное число $n = 2q+1$ вершин. Докажите, что число его рёбер удовлетворяет неравенству

$$e \leqslant \frac{n^2-1}{4}.$$

Приведите пример графа, для которого в данной оценке достигается равенство.

Экстремальный граф есть $K_{q,q+1}$

Задачи 7–9 являются частным случаем общей проблемы нахождения максимального числа рёбер графа на n вершинах, не содержащего некоторого подграфа H. Это число традиционно обозначается $\mathrm{ex}(n, H)$.

10. Убедитесь, что из результатов задач 7 и 9 вытекает формула

$$\mathrm{ex}(n, K_3) = \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

11. Пусть n делится на $s-1$. Докажите, что

$$\mathrm{ex}(n, K_s) = \frac{n^2(s-2)}{2(s-1)}.$$

Какой граф (на n вершинах без K_s) имеет данное количество рёбер?

Полный $(s-1)$-дольный граф $K_{q,q,\ldots,q}$, где $n = q(s-1)$

Теперь обобщим этот результат и докажем второй вариант теоремы Турана.

12. (*Теорема Турана в терминах запрещённых подграфов*)

$$\mathrm{ex}(n, K_s) = \frac{n^2(s-2) + r^2 - r(s-1)}{2(s-1)},$$

где r — остаток от деления n на $s-1$ (то есть $n = q(s-1)+r$, $0 \leqslant r \leqslant s-2$). Данное число рёбер имеет полный $(s-1)$-дольный граф с $s-r-1$ долями из q вершин и r долями из $q+1$ вершин.

13. Какое наибольшее количество рёбер может содержать граф, имеющий 12 вершин и хроматическое число 4?

48

14. Чему равно $\mathrm{ex}(8, P_3)$?

4