

Теорема Пифагора

Мы готовы вывести важнейшую теорему геометрии — теорему Пифагора. С помощью теоремы Пифагора выполняются многие геометрические вычисления.

Косинус угла

Прежде всего нам понадобится понятие косинуса острого угла. Пусть α — острый угол прямоугольного треугольника (рис. 1).

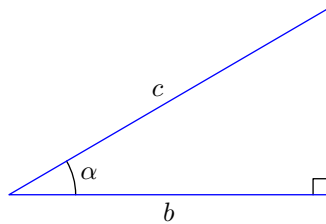


Рис. 1. $\cos \alpha = b/c$

Косинус угла α — это отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Замечательно то, что косинус угла α не зависит от конкретного прямоугольного треугольника (с острым углом α) и определяется лишь самой величиной α . В таких случаях говорят, что определение *корректно*. Докажем корректность определения косинуса.

Доказательство корректности. Рассмотрим два прямоугольных треугольника, каждый с острым углом α . Совместим их так, как показано на рис. 2.

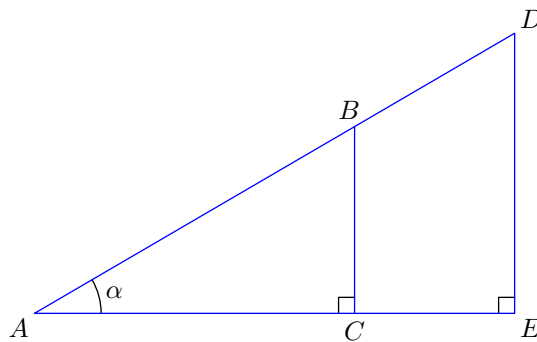


Рис. 2. К доказательству корректности

По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD},$$

откуда

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}.$$

Как видим, в треугольниках ABC и ADE отношение прилежащего катета к гипотенузе одно и то же. Следовательно, величина $\cos \alpha$ не зависит от выбранного треугольника, так что косинус угла определено корректно.

Теорема Пифагора

Введённое понятие косинуса угла позволяет доказать теорему Пифагора.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$ и гипотенузой $AB = c$. Проведём высоту CH (рис. 3).

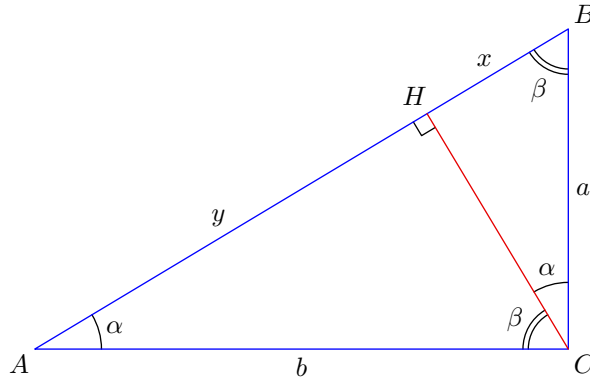


Рис. 3.

Отрезок $BH = x$ есть проекция катета a на гипотенузу. Отрезок $AH = y$ есть проекция катета b на гипотенузу. Очевидно, что $x + y = c$.

Пусть $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ — острые углы треугольника ABC . Угол β является также острым углом треугольника BCH ; ясно поэтому, что $\angle BCH = \alpha$. Точно так же $\angle ACH = \beta$.

Из треугольников BCH и ABC имеем соответственно:

$$\cos \beta = \frac{x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c},$$

откуда

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c},$$

или

$$a^2 = cx. \quad (1)$$

Записав это в виде $a = \sqrt{cx}$, мы видим, что *катет есть среднее геометрическое гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.*

Точно такой же результат имеем и для другого катета:

$$b^2 = cy. \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), получим:

$$a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y) = c \cdot c = c^2.$$

Теорема Пифагора доказана.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ПИФАГОРА. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник является прямоугольным (третья сторона — гипотенуза).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для сторон a , b , c некоторого треугольника Δ выполнено равенство $a^2 + b^2 = c^2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник Δ_1 с катетами a и b . По теореме Пифагора

его гипотенуза равна $\sqrt{a^2 + b^2} = c$. Значит, треугольники Δ и Δ_1 равны по трём сторонам, и поэтому Δ — прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c . Теорема доказана.

Числа a , b , c , связанные соотношением $a^2 + b^2 = c^2$, называются *пифагоровой тройкой*. Пифагоровых троек бесконечно много. Несколько пифагоровых троек встречаются в задачах весьма часто и их обязательно нужно знать.

1) Тройка 3, 4, 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Прямоугольный треугольник с катетами 3, 4 и гипотенузой 5 называется *египетским*.

2) Тройки, кратные тройке 3, 4, 5:

- 6, 8, 10;
- 9, 12, 15;
- 12, 16, 20;
- 15, 20, 25 и так далее.

3) Другие важные тройки:

- 5, 12, 13 ($5^2 + 12^2 = 13^2$);
- 7, 24, 25;
- 8, 15, 17;
- 9, 40, 41.

Синус, тангенс, котангенс

Снова рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c (рис. 4).

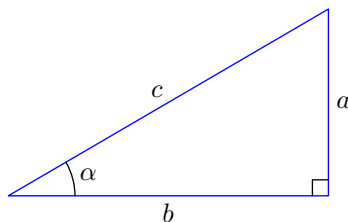


Рис. 4.

Синус угла α — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинус угла α — это, как мы уже знаем, отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенс угла α — это отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Котангенс угла α — это отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Основное тригонометрическое тождество доказывается очень просто с помощью теоремы Пифагора. Вы это сделаете самостоятельно в соответствующей задаче к данному листку.

Из основного тригонометрического тождества мы видим, что синус острого угла однозначно вычисляется через его косинус:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Следовательно, синус угла также определён корректно — значение синуса определяется только величиной угла и не зависит от выбранного прямоугольного треугольника.

Далее, для тангенса имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Эти равенства показывают, что тангенс и котангенс также зависят лишь от величины угла, но не от конкретного прямоугольного треугольника.

Задачи

1. Найдите диагональ квадрата со стороной a .

2^0

2. В прямоугольном треугольнике с углом 60° гипотенуза равна 2. Найдите катеты.

3 и 1

3. Вычислите синус, косинус, тангенс и котангенс углов 45° , 30° и 60° .

4. С помощью теоремы Пифагора докажите основное тригонометрическое тождество.

5. В прямоугольном треугольнике с острым углом α гипотенуза равна c . Найдите катеты.

c sin alpha и c cos alpha

6. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен 60° .

2^3

7. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° , а основание равно 6. Найдите боковую сторону.

3^3

8. Найдите диагональ прямоугольника со сторонами 5 и 12.

13

9. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен 120° . Найдите диагонали трапеции.

4^3 и 2^3

10. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если проекции катетов на гипотенузу равны x и y .

$$\frac{xy}{x+y}$$

11. Найдите катеты, если их проекции на гипотенузу равны x и y .

$$\left(\frac{h+x}{h}\right)^2 x, \left(\frac{h+x}{h}\right)^2 y$$

12. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна h и делит сторону пополам. Острый угол параллелограмма равен 30° . Найдите диагонали параллелограмма.

$$2h \text{ и } 2h\sqrt{3}$$

13. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB . Высота BM параллелограмма делит сторону AD на отрезки $DM = 9$ и $AM = 4$. Найдите стороны и диагонали параллелограмма.

$$13, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{13}, 5\sqrt{13}$$

14. Найдите расстояние от центра окружности радиуса 10 до хорды длиной 12.

$$8$$

15. Точка M находится на расстоянии 26 от центра окружности радиуса 10. Прямая MA касается окружности в точке A . Найдите длину отрезка MA .

$$24$$

16. Прямые, касающиеся в точках A и B окружности с центром O , пересекаются в точке M . Найдите хорду AB , если отрезок MO делится ею на отрезки 2 и 18.

$$12$$

17. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность диаметра 14.

$$7\sqrt{2}$$

18. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.

$$25 \text{ и } 20$$

19. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна 5 и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите стороны треугольника.

$$5, 5\sqrt{3}, 10$$

20. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите медиану, проведённую к гипотенузе.

$$10$$

21. Найдите высоту трапеции со сторонами 5, 5, 5, 13.

$$3$$

22. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13, основание равно 10. Найдите высоту треугольника, проведённую к основанию.

21

23. Дан равносторонний треугольник со стороной a . Найдите его высоту, а также радиусы вписанной и описанной окружностей.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{\sqrt{3}}$$

24. Вершина M правильного треугольника ABM со стороной a расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$. Найдите диагональ этого прямоугольника.

$$\frac{a}{\sqrt{3}}$$

25. Стороны треугольника равны a и b . К этим сторонам проведены высоты h_a и h_b соответственно. Докажите, что $ah_a = bh_b$.

26. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

$$\frac{12}{5}$$

27. Основание равнобедренного треугольника равно a , боковая сторона равна b . Найдите высоту, проведённую к боковой стороне.

$$\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}$$

28. Сторона квадрата $ABCD$ с центром O равна 6. Точка M расположена на стороне CD , причём $CM : MD = 1 : 2$. Найдите стороны треугольника AOM .

$$2\sqrt{2}, 2\sqrt{13}, \sqrt{10}$$

29. В треугольнике со сторонами 13, 14, 15 найдите высоту, проведённую к большей стороне.

$$\frac{5}{6}$$

30. Найдите высоту трапеции с основаниями 4, 14 и боковыми сторонами 6, 8.

$$\frac{2}{3}$$

31. Одно основание прямоугольной трапеции вдвое больше другого, а боковые стороны равны 4 и 5. Найдите диагонали трапеции.

$$3\sqrt{13} \text{ и } 5$$

32. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны p и q . Найдите сторону квадрата.

$$bd$$

33. В прямоугольный треугольник с углом в 60° вписан ромб со стороной b так, что угол 60° у них общий, а остальные вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

$$\frac{81\sqrt{6}}{6}$$

34. Две вершины квадрата лежат на основании равнобедренного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника равно a , а угол при основании равен 30° .

$$\frac{11}{(1-\sqrt{3}/2)^2} a$$

35. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если центр описанной вокруг неё окружности лежит на большем основании.

$$4\sqrt{8} \text{ и } 5\sqrt{5}$$

36. Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол α . Найдите расстояние от точки C до диаметра AB .

$$2R \sin \alpha \cos \alpha$$

37. Диагональ равнобедренной трапеции равна d , средняя линия равна m . Найдите высоту трапеции.

$$\frac{d^2 - 4m^2}{4}$$

38. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются под прямым углом. Большая боковая сторона равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

$$9$$

39. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен r , а острый угол ромба равен α . Найдите сторону ромба.

$$\frac{2r}{\sin \alpha}$$

40. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

$$3\sqrt{2}$$

41. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.

$$\frac{a}{2} \operatorname{csc} \frac{\alpha}{2}$$

42. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a , а высота, проведённая к основанию, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

$$\frac{a}{\sqrt{3}}$$

43. Сторона треугольника равна 2, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45° . Найдите остальные стороны треугольника.

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{2} \text{ и } \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{2}$$

44. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{3}{5}$, а высота, опущенная на основание, равна h . Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

$$\frac{5}{4h}$$

45. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной a . Найдите MN .

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$

46. Радиус окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника, равен R . Угол при основании равен α . Найдите стороны треугольника.

$$2R \sin \alpha, 4R \sin \alpha \cos \alpha$$

47. Вычислите $\sin 15^\circ$.

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

48. Медианы, проведённые к катетам прямоугольного треугольника, равны a и b . Найдите гипотенузу.

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}}}$$

49. Две стороны треугольника равны a и b . Медианы, проведённые к этим сторонам, перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

$$\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}}$$

50. В прямоугольный треугольник с гипотенузой a и острым углом 30° вписан прямоугольник, одна сторона которого вдвое больше другой. Большая сторона прямоугольника находится на гипотенузе, а противоположные ей вершины — на катетах. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) a$$

51. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $BC = a$ и $AC = b$.

$$\frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

52. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки m и n . Найдите основание треугольника.

$$(u + m)\sqrt{2} \text{ или } (u + m)\sqrt{2}$$

53. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D так, что $AD : DB = 1 : 3$. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC .

9

54. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника ABC .

68 и 92

55. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведённой из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

$\frac{a \cos \alpha}{(a \sin \alpha \pm 1) \sqrt{2}}$

56. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

15 и 8

57. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом основании. Найдите все стороны трапеции, если её высота равна 12, а биссектрисы равны 13 и 15.

14, 12,5, 29,4, 16,9

58. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ и образует с большим основанием AD и боковой стороной AB углы α и β соответственно. Найдите основания трапеции.

$((b + a) \sin \alpha \pm a \cos \alpha) \sqrt{2}$

59. Найдите диагонали трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2.

$\sqrt{3}$

60. Основания трапеции равны 3 и 5, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, а другая делит пополам угол при большем основании. Найдите высоту трапеции.

$\frac{5}{12}$

61. Боковая сторона AD и основание CD трапеции $ABCD$ равны a , основание AB равно $2a$, а диагональ AC равна b . Найдите боковую сторону BC .

$\sqrt{4a^2 - b^2}$

62. Катеты прямоугольного треугольника равны 21 и 28. Окружность с центром на гипотенузе касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

12

63. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведён к ней перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключённый внутри треугольника, равен c , а отрезок, заключённый между одним катетом и продолжением другого, равен $3c$. Найдите гипотенузу.

4c

64. Окружность, вписанная в трапецию, делит её боковую сторону на отрезки p и q . Найдите радиус окружности.

$$\frac{bd}{p+q}$$

65. Окружность радиуса R вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно $4R/3$. Найдите остальные стороны трапеции.

$$2R, 10R/3, 4R$$

66. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найдите длину отрезка их общей касательной, заключённого между точками касания.

$$2\sqrt{Rr}$$

67. Даны окружности радиусов R и r ($R > r$). Расстояние между центрами этих окружностей равно a ($a > R + r$). Найдите отрезки общих внешних и внутренних касательных, заключённые между точками касания.

$$\sqrt{a^2 - (R-r)^2} \text{ и } \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$$

68. Окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внешним образом в точке K . К ним проведены две общие внешние касательные. Их точки касания с меньшей окружностью — A и D , с большей — B и C соответственно. а) Найдите отрезок MN общей внутренней касательной, заключённый между внешними касательными. б) Докажите, что углы AKB и O_1MO_2 прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей). в) Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

$$\text{а) } \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}; \text{ в) } \frac{2\sqrt{Rr}}{R-r}$$

69. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC , сумма острых углов A и C равна 90° . Основания $AD = a$, $BC = b$. Найдите боковые стороны трапеции.

$$(q+v)q \text{ и } (q+v)v$$

70. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите высоту трапеции.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

71. Стороны параллелограмма равны a и b ($a > b$), угол между ними равен α . Найдите стороны и диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис внутренних углов параллелограмма.

$$q-v \text{ и } q+v, \frac{q}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \text{ и } \frac{q}{\cos(\frac{\alpha}{2})}$$

72. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N . Катеты равны 1 и 4. Найдите CN .

$$\frac{21}{4}$$

73. Основание CD , диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p . Боковая сторона BC равна q . Найдите диагональ AC .

$$\sqrt{p^2 - q^2}$$

74. Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите BD , если $AC = a$.

$$\frac{a^2}{2R}$$

75. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

$$\frac{a+b}{2}$$

76. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

77. В круге проведены диаметры AB и CD . M — некоторая точка. Известно, что $AM = 15$, $BM = 20$ и $CM = 24$. Найдите DM .

$$1$$

78. Катет прямоугольного треугольника равен 2, противолежащий ему угол равен 30° . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

79. В прямоугольном треугольнике с углом 30° радиус вписанной окружности равен r . Найдите расстояние между центром вписанной окружности и центром внеписанной окружности, касающейся меньшего катета. (Окружность называется *внеписанной*, если она касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)

$$2r\sqrt{2}$$

80. Найдите радиус вписанной окружности и радиусы трёх внеписанных окружностей треугольника со сторонами: а) 5, 12, 13; б) 10, 10, 12.

$$\frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

81. В треугольнике PQR угол QRP равен 60° . Окружность радиуса 2 вписана в этот треугольник, а внеписанная окружность радиуса 3 касается продолжений сторон PQ и PR . Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной QR .

$$1$$

82. Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , равен $\sqrt{3} - 1$. Радиус внеписанной окружности, касающейся стороны BC , равен $\sqrt{3} + 1$. Угол A треугольника равен 60° . Найдите углы B и C .

$$60^\circ \text{ и } 90^\circ$$

83. Дана окружность радиуса 2 с центром O . Из конца отрезка OA , пересекающегося с окружностью в точке M , проведена касательная AK к окружности (K — точка касания). Угол OAK равен 60° . Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK , AM и дуги MK .

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} - 2$$

84. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке C , проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Найдите радиусы окружностей, если $AC = 6$, $BC = 8$.

$$\frac{3}{10} \text{ и } \frac{7}{15}$$

85. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R . Его диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке P . Найдите $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$ и $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$.

$$2R^2 \text{ и } 2R^2$$

86. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания данных окружностей.

$$1$$

87. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90^\circ$) и два квадрата $BEFC$ и $AMNB$ расположены так, что точки A и E лежат по разные стороны от прямой BC , а точки C и M — по разные стороны от прямой AB . Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AB = b$, $AC = a$.

$$a^2 + b^2 + \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$$

88. На высотах BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.