

Текстовые задачи

Содержание

1	Движение	1
2	Работа	9
3	Стоимость	11
4	Части и доли	11
5	Проценты	12
6	Смеси и концентрации	14
7	Часы и время	15
8	Возраст	16
9	Разное	16

1 Движение

1.1. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9.1) После того как пешеход прошёл половину пути и 1 км, ему осталось пройти $1/3$ пути и 1 км. Чему равен весь путь?

1 км

1.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9.2) Водитель машины заметил, что одомер (счётчик пройденного расстояния) показывает симметричное число (т. е. число, которое одинаково читается слева направо и справа налево) 15951. Ровно через час одомер показал другое симметричное число. С какой скоростью ехала машина, если в течение всего этого часа она ехала с постоянной скоростью?

км/ч 011

1.3. (Всеросс., 2014, ШЭ, 7.4, 8.4) Саша, Лёша и Коля одновременно стартовали в забеге на 100 м. Когда Саша финишировал, Лёша находился в десяти метрах позади него, а когда финишировал Лёша — Коля находился позади него в десяти метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Саша и Коля, когда Саша финишировал? (Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но, конечно, не равными скоростями.)

м 61

1.4. (Всеросс., 2020, ШЭ, 9.2) У Маши в школе уроки заканчиваются в 13:00, мама встречает её на машине, и они едут домой. Однажды уроки закончились в 12:00, и Маша пошла домой пешком. По пути она встретила маму, которая, как обычно, поехала забирать дочь к 13:00 в школу. И дальше Маша с мамой поехали домой на машине, причём приехали на 12 минут раньше обычного. Во сколько Маша встретила маму на дороге? (Скорости Маши и мамы постоянны, время на посадку в машину не тратится.)

12:54

1.5. («Курчатова», 2017, 8.1) Автобусы из Москвы в Воронеж выходят каждый час, в 00 минут. Автобусы из Воронежа в Москву выходят каждый час, в 30 минут. Поездка между городами занимает 8 часов. Сколько автобусов из Воронежа встретит автобус, вышедший из Москвы, на своём пути?

91

1.6. («Ломоносов», 2011, 7.7, 8.6, 9.5) Ваня опаздывал в школу и, поднимаясь бегом по эскалатору, не сразу заметил, что в момент, когда он ступил на эскалатор, из его сумки выпал учебник. Обнаружив пропажу, Ваня побежал вниз с удвоенной скоростью и через 20 секунд поднял книжку, оказавшись в этот момент ровно посередине эскалатора. От бега Ваня устал и остаток пути провёл стоя. Сколько времени провёл Ваня на эскалаторе?

2 минуты

1.7. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8.4) Пункты A , B , C расположены последовательно, причём расстояние AB равно a км, а расстояние BC равно b км. Из пункта A выехал велосипедист и поехал в пункт C . Одновременно с ним из пункта B вышел пешеход и направился в пункт A . Известно, что пешеход и велосипедист пришли в пункты A и C одновременно. Найдите, на каком расстоянии от пункта A они встретились (a и b известны).

км $\frac{q+av}{(q+v)v}$

1.8. («Ломоносов», 2019, 9.1) Вася и Петя выбежали одновременно с места старта круговой беговой дорожки и побежали в противоположных направлениях. На бегу в некотором месте дорожки они встретились. Вася пробежал полный круг и, продолжая бег в том же направлении, добежал до места их прежней встречи в тот момент, когда Петя пробежал полный круг. Во сколько раз Вася бежал быстрее Пети?

$\frac{2}{1+\sqrt{2}}$

1.9. (ММО, 2015, 8.1) Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты — ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?

За 6 минут

1.10. (ММО, 2010, 8.4) Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

Могут

1.11. (Олимпиада им. Эйлера, РЭ, 2016.5) Три спортсмена пробежали дистанцию в 3 километра. Первый километр они бежали с постоянными скоростями v_1 , v_2 и v_3 соответственно, такими, что $v_1 > v_2 > v_3$. После отметки в 1 километр каждый из них изменил скорость: первый — с v_1 на v_2 , второй — с v_2 на v_3 , а третий — с v_3 на v_1 . Кто из спортсменов пришел к финишу последним?

Второй

1.12. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 9.3*) Дима должен был попасть на станцию в 18:00. К этому времени за ним должен был приехать отец на автомобиле. Однако Дима успел на более раннюю электричку и оказался на станции в 17:05. Он не стал дожидаться отца и пошёл ему навстречу. По дороге они встретились, Дима сел в автомобиль, и они приехали домой на 10 минут раньше рассчитанного времени. С какой скоростью шёл Дима до встречи с отцом, если скорость автомобиля была 60 км/ч?

6/100 9

1.13. (*Всеросс., 2016, МЭ, 9.4*) Из Златоуста в Миасс выехали одновременно «ГАЗ», «МАЗ» и «КамАЗ». «КамАЗ», доехав до Миасса, сразу повернул назад и встретил «МАЗ» в 18 км, а «ГАЗ» — в 25 км от Миасса. «МАЗ», доехав до Миасса, также сразу повернул назад и встретил «ГАЗ» в 8 км от Миасса. Каково расстояние от Златоуста до Миасса?

100 км

1.14. (*«Физтех», 2020, 9.1*) На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук — против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

$(\sqrt{3}; 2), (0; 4), (-1; 0), (\sqrt{3}; 2)$

1.15. (*«Физтех», 2020, 9.1*) Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Пчела движется по часовой стрелке, а шмель — против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ и $N_0(2; 0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

$(\sqrt{3}; 1), (1; \sqrt{3}), (\sqrt{3}; 1), (1; \sqrt{3})$

1.16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9.4*) Из пункта A в пункт B ровно в полдень выехал велосипедист; одновременно с ним из B в A выехал автомобиль. Спустя некоторое время из пункта A вслед за велосипедистом выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста в тот момент, когда последний встретился с автомобилем. По прибытии в A автомобиль немедленно развернулся и проследовал в пункт B , куда и прибыл одновременно с мотоциклистом, но на 50 мин раньше велосипедиста. Определите, в какой момент времени мотоциклист выехал из пункта A , если известно, что это произошло за 1 ч 20 мин до прибытия туда автомобиля.

В 12 часов 20 минут

1.17. (*«Высшая проба», 2013, 9.4*) Вдоль берега круглого озера периметром 1 км плывут два лосося; один — с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой — с постоянной скоростью 750 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 200 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за один час?

2

1.18. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10.2*) Петя сбегает с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем мама едет на лифте. Мама едет на лифте с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Петя сбегает с пятого этажа на первый. За сколько секунд Петя сбегает с четвёртого этажа на первый? (Длины пролётов лестницы между всеми этажами одинаковы.)

За 12 секунд

1.19. (*«Ломоносов», 2017, 10–11.1*) Когда автомобиль едет из пункта A в пункт B , он тратит 25% времени на путь в гору, 60% — по равнине, а остальное время — с горы. Время его движения из A в B и по той же дороге из B в A одинаково, а его скорости в гору, с горы и по равнине постоянны, но различны. Во сколько раз быстрее автомобиль едет с горы, чем в гору?

3/5

1.20. (*«Ломоносов», 2016, 10–11.1*) Незнайка прыгал от своего дома к дому Знайки. Три четверти пути он пропрыгал прыжками, длина которых равна двум его обычным шагам, а остальную четверть пути — прыжками, длина которых равна трём его обычным шагам. Оказалось, что прыжков в два шага оказалось на 350 больше, чем прыжков в три шага. Сколько обычных шагов от дома Знайки до дома Незнайки? Считаем, что все шаги у Незнайки одинаковые.

1200

1.21. (*«Ломоносов», 2019, 10–11.1*) Из поселка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник A пешком и мотоцикл с пассажиром — дачником B . Не доехав до станции, мотоциклист высадил пассажира и сразу поехал обратно к поселку, а дачник B пошел к станции пешком. Встретив дачника A , мотоциклист посадил его к себе и привез на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Какую часть пути от поселка до станции дачник A проехал на мотоцикле, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 9 раз меньшей скорости мотоцикла?

9/3

1.22. (*«Курчатов», 2019, 10.1*) Из города A в город B , находящийся на расстоянии 240 км от A , со скоростью 40 км/ч выходит автобус. Одновременно с ним из B в A выезжает автомобиль со скоростью v км/ч. Через полчаса после встречи с автобусом автомобиль, не доезжая до города A , поворачивает обратно и с прежней скоростью движется по направлению к B . Определить все значения v , при которых автомобиль приходит в B раньше, чем автобус.

(120) ∈ v

1.23. (*«Ломоносов», 2011, 10–11.1*) Два поезда, содержавшие по 15 одинаковых вагонов каждый, двигались навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ровно через 28 с после встречи их первых вагонов пассажир Саша, сидя в купе третьего вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Валерой, а ещё через 32 с последние вагоны этих поездов полностью разъехались. В каком по счёту вагоне ехал Валера?

В 12-м

1.24. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.1) Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса, которые встретились 2 февраля в 12:00. Найдите дату и время начала движения автобусов, если их скорости на всём пути постоянные, и один из них прибыл 3 февраля в 4:00 в пункт B , а другой прибыл 3 февраля в 13:00 в пункт A .

00:91 я вигдеаф I

1.25. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.1) На путь в гору по маршруту A турист затратил 2 часа, а на путь с горы по маршруту B , который на 18 км длиннее маршрута A , — 4 часа. Найдите общую длину пути, пройденного туристом, если каждый километр при спуске турист проходил на 10 минут быстрее, чем при подъёме.

30 км

1.26. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.1) Рассеянный Вася на полпути от школы до дома обнаружил, что оставил в школе портфель. В этот момент он встретил двух друзей. Первый был на мотоцикле и мог отвезти Васю до школы, но тогда бы домой Васе нужно было идти пешком. Второй был на велосипеде и мог отвезти Васю до школы и обратно до самого дома, но прежде, чем посадить пассажира на велосипед, ему нужно было подкачать колёса. За время подкачки колёс мотоциклист как раз доедет до школы. С кем из друзей поехать Васе, чтобы взять портфель и как можно быстрее попасть домой, если он проходит половину пути от школы до дома за то же время, за которое велосипедист проезжает $\frac{7}{9}$ этого пути?

Быстрее на велосипеде

1.27. (МГУ, мехмат, 2005.1) Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

28 минут

1.28. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11.2) Вася и Петя одновременно выбежали с места старта круговой беговой дорожки и побежали в противоположных направлениях с постоянными скоростями. В некоторый момент они встретились. Вася пробежал полный круг и, продолжая бег в том же направлении, добежал до места их первой встречи в тот момент, когда Петя пробежал полный круг. Найдите отношение скоростей Васи и Пети.

$\frac{7}{5^{\wedge}+1}$

1.29. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.2) Между пунктами A и B с постоянной скоростью курсирует один автобус (время на остановки пренебрежимо мало). Из пункта A в пункт B со скоростью 11 км/ч выехал велосипедист и за время пути строго между этими пунктами ровно 5 раз поравнялся с автобусом. В каких пределах может находиться скорость автобуса при этих условиях?

[77; 77]

1.30. (ОММО, 2009.3) Пролетая на драконе, Гарри Поттер увидел крысу Рона, бегущую в противоположную сторону. Пролетев ещё полминуты не меняя направления, Гарри спрыгнул с дракона и отправился в погону. Известно, что скорость Гарри в 5 раз меньше скорости дракона. Во сколько раз скорость Гарри больше скорости крысы, если он догнал крысу через 4,5 минуты после их встречи?

В 3 раза

1.31. (ОММО, 2010.3) Перед испытательным пуском одного из агрегатов строящейся гидроэлектростанции выяснилось, что расстоянии S км выше плотины находится рыбацкая сеть. Скорость течения реки составляет v км/ч. Работники гидроэлектростанции решили отправиться туда на катере. Снятие сети займёт 5 минут. Какова должна быть собственная скорость катера, чтобы вся поездка (включая время, требуемое на снятие сети) заняла не более 45 минут?

$$\frac{v}{v^2 + 2vS + S^2} \leq n$$

1.32. (ОММО, 2020.3) Пункты A и B , находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи, и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 6 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

$$\frac{1}{2} \text{ часа}$$

1.33. («Ломоносов», 2008.4) Кот преследовал мышку по прямолинейной дорожке, ведущей к норке мышки. Их скорости были постоянны. В некоторый момент расстояние от мышки до кота было равно 11 м, а до норки — 4 м. В некоторый предыдущий момент расстояние между мышкой и котом было втрое больше расстояния между ней и норкой. Успел ли кот догнать мышку, прежде чем та юркнула в норку?

нет

1.34. («Ломоносов», 2006.5) Из пункта A в пункт B в 7:00 вышел пешеход, а через некоторое время из B в A выехал всадник. Пешеход пришёл в B через 12 часов после выезда оттуда всадника. Всадник приехал в A в 16:00 того же дня. Скорости пешехода и всадника постоянны. Какую долю пути из A в B прошёл пешеход до его встречи с всадником?

$\frac{1}{3}$

1.35. (МГУ, мехмат, 2000-07.3) Длина дороги, соединяющей пункты A и B , равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B , каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй — со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за время движения автобусы

а) встретятся в пункте B ;

б) окажутся в одном месте строго между пунктами A и B , если известно, что первый стартует из пункта A , а второй — из пункта B ?

761 (6 '9 (в)

1.36. (МГУ, мехмат, 2002-07.3) Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и увеличив скорость в пункте B , продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C . Приехав в C , велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найти расстояние между пунктами A и B , если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

км $\frac{13}{008}$

1.37. (МГУ, ДВИ, 2013.5) В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер «Быстрый». Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же самый момент «Быстрый», не желая встречи со «Смелым», развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», на «Смелом» осознали, что они идут с «Быстрым» на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

2 км

1.38. (МГУ, ДВИ, 2015.6) Велосипедист Василий выехал из пункта A в пункт B . Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадежно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошел пешком обратно в пункт A за новым велосипедом. В момент поломки из пункта A выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта A он встретит Василия, если пункт B отстоит от пункта A на 4 км, а Василий доберётся до пункта A тогда же, когда Григорий до пункта B ? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

км 1

1.39. («Физтех», 2020, 10.5) По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

$$\left(1 - \frac{v}{q}\right) \frac{v}{q} = q \text{ и } \left(1 + \frac{v}{q}\right) \frac{v}{q} = v \text{ или } (v - q) \text{ или } (q - v) \text{ или } (v + q) \text{ или } (q + v)$$

1.40. («Физтех», 2020, 10.5) По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(2; 2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.

$$\left(1 - \frac{v}{q}\right) \frac{v}{q} = q \text{ и } \left(1 + \frac{v}{q}\right) \frac{v}{q} = v \text{ или } (v - q) \text{ или } (q - v) \text{ или } (v + q) \text{ или } (q + v)$$

1.41. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.4) Скорость парома линейно зависит от веса переправляемого груза так, что при нагрузке в 50 тонн скорость на 10% больше, чем при нагрузке в 60 тонн. При нагрузке в 70 тонн скорость парома равна 6 км/ч. Найдите скорость парома при наибольшем грузообороте. Грузооборотом называется произведение скорости (в км/ч) парома на вес перевозимого груза (в тоннах).

$$\frac{v}{q} = \frac{v}{q}$$

1.42. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.5) В 9:00 из пункта A в пункт B выехали велосипедист Петр и мотоциклист Василий, а из B в A по той же дороге выехал мотоциклист Георгий. В 10:00 мотоциклисты встретились и зашли в кафе, проведя там не менее 75 мин и расставшись в тот момент, когда Петр проезжал мимо. Продолжив движение, Василий прибыл в пункт B не позже 11:55, а Георгий прибыл в конечный пункт одновременно с Петром. Найдите время прибытия Петра и Георгия, если скорости всех участников постоянны.

$$12:45$$

1.43. (МГУ, мех.мат, 2004-07.5) Дорога проходит последовательно через пункты A , B , C и D . Расстояние от A до B равно 24 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью автомобиль. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями велосипедист и мотоциклист. Когда автомобиль догнал велосипедиста, мотоциклист обгонял их на 6 км. В пункте C автомобиль догнал мотоциклиста, и доехав до D , сразу поехал обратно в A , встретившись с велосипедистом во второй раз в C . Найти расстояние между B и C , если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи автомобиля и велосипедиста в два раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда автомобиль впервые догнал мотоциклиста.

$$16 \text{ км}$$

1.44. («Ломоносов», 2013, 10–11.7) Три велосипедиста одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трём concentрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 20$ м для первого, $R_2 = 40$ м для второго и $R_3 = 80$ м для третьего велосипедиста. В начальный момент времени велосипедисты находятся на одном луче с вершиной в точке O . Все велосипедисты двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причём скорость первого велосипедиста в два раза больше скорости второго, но в два раза меньше скорости третьего. Велосипедисты продолжают своё движение до тех пор, пока не закончит свой круг последний из них (тот, что потратит на объезд своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O ?

Для ответа

1.45. («Ломоносов», 2005.9) Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A , причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A . В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

от A к B ; 8 км/ч

1.46. («Высшая проба», 2013, 10.2) Вдоль берега круглого озера периметром 1,1 км плывут два лосося; один — с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой — с постоянной скоростью 600 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 70 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за сутки и одну минуту?

59

1.47. («Высшая проба», 2013, 11.3) Улитка, имеющая постоянную скорость 40 см/ч, начала ползти по цилиндрической колонне из точки A . Каждые 15 минут она поворачивала поочередно то влево, то вправо на 90° , а всё остальное время ползла прямо. (Углы и длины измеряются на плоской развёртке колонны.) Через 1 час 45 минут после начала путешествия улитка заметила, что снова оказалась в точке A , а через 12,5 часов после начала путешествия захотела вернуться в точку A по кратчайшему пути, уже никуда не сворачивая. Какое расстояние ей придётся проползти?

50 см

1.48. (ММО, 2020, 11.1) Мальчик едет на самокате от одной автобусной остановки до другой и смотрит в зеркало, не появился ли сзади автобус. Как только мальчик замечает автобус, он может изменить направление движения. При каком наибольшем расстоянии между остановками мальчик гарантированно не упустит автобус, если он знает, что едет со скоростью втрое меньшей скорости автобуса и способен увидеть автобус на расстоянии не более 2 км?

2 Работа

2.1. (Всеросс., 2017, ШЭ, 9.2) Чебурашка и Гена съели торт. Чебурашка ел вдвое медленнее Гены, но начал есть на минуту раньше. В итоге им досталось торта поровну. За какое время Чебурашка съел бы торт в одиночку?

За 4 минуты

2.2. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 10.1*) Двое рабочих за два часа вырыли траншею. При этом первый рабочий устал и начал работать вдвое медленней, а второй рабочий раззадорился и начал работать вдвое быстрее, так что на прокладку второй такой траншеи у них ушёл один час. Во сколько раз производительность второго превосходила производительность первого изначально?

3

2.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.1*) Лошадь съедает 1 ц корма за 8 дней, осёл — за 12 дней, а верблюд — за 8 дней. На сколько дней хватит 85 ц корма 7 лошадям, 5 ослам и 5 верблюдам?

40

2.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.1*) Бабушка читает незнакомую ей книгу из 970 страниц. Незнакомый текст она читает со скоростью 10 страниц в час, а прочитанный ранее — со скоростью 20 страниц в час. Пока книга не прочитана, бабушка читает её ежедневно по 5 часов с того места, где лежит закладка, и оставляет закладку там, где закончила чтение. В какой день недели бабушка прочтёт книгу до конца, если первые страницы она прочла в понедельник, а каждую ночь её внук переносит закладку на 20 страниц назад?

В среду

2.5. (*«Ломоносов», 2016, 10–11.3*) Том Сойер, Сид Сойер и Гек Финн красили забор. Вначале Том красил один в течение времени, за которое Сид и Гек, работая вместе, могли бы покрасить половину забора. Затем красил один Сид в течение времени, за которое Том и Гек, работая вместе, могли бы покрасить $5/4$ всего забора. Потом красил один Гек в течение времени, за которое Том и Сид, работая вместе, могли бы покрасить четверть всего забора. В результате весь забор был покрашен. Во сколько раз быстрее они окончили бы работу, если бы с самого начала всё время работали вместе? (Предполагается, что скорость работы каждого мальчика постоянна.)

3

2.6. (*ОММО, 2011.4*) Каждому из двух рабочих поручили обработать одинаковое количество деталей. Первый выполнил работу за 8 часов. Второй потратил больше 2 часов на наладку оборудования и с его помощью закончил работу на 3 часа раньше первого. Известно, что второй рабочий через 1 час после начала работы оборудования обработал столько же деталей, сколько к этому времени первый. Во сколько раз оборудование увеличивает производительность труда?

В 4 раза

2.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.3*) Для бригады маляров-учеников была запланирована окраска 360 кв. м стен. Перед началом работы один из учеников заболел, и вместо него работал мастер, производительность которого в три раза больше производительности каждого из учеников. Поэтому каждый из учеников в действительности покрасил на 6 кв. м меньше, чем планировалось. Все ученики и мастер работали одинаковое время. Сколько учеников работало?

6

3 Стоимость

3.1. (Всеросс., 2018, ШЭ, 9.1) 45 конфет стоят столько же рублей, сколько их можно купить на 20 рублей. Сколько конфет можно купить на 50 рублей?

52

3.2. (Всеросс., 2018, ШЭ, 8.5) Три школьницы зашли в магазин. Аня купила 2 ручки, 7 карандашей и 1 блокнот, Варя — 5 ручек, 6 карандашей и 5 блокнотов, Саша — 8 ручек, 4 карандаша и 9 блокнота. Все заплатили поровну, но одна при оплате воспользовалась скидкой. Кто? (Объясните свой ответ.)

Варя

4 Части и доли

4.1. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.2) Однажды два друга вложили деньги в общее дело: каждый вложил свою сумму, а вместе — 1 млн руб. За ночь один из них вложил в то же дело дополнительную сумму. Сколько всего денег он вложил в итоге, если его новая доля в общем деле оказалась в 7 раз больше прежней, тогда как доля другого — в 3 раза меньше прежней?

2,1 млн руб.

4.2. («Ломоносов», 2010.3) Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил ещё 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,05, а когда он добавил ещё 1 млн р., его доля увеличилась ещё на 0,04. Сколько денег ему нужно добавить ещё, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,06?

2 млн руб.

4.3. (ОММО, 2019.9) В школе имеется три кружка: по математике, по физике и по информатике. Директор как-то заметил, что среди участников кружка по математике ровно $1/6$ часть ходит ещё и на кружок по физике, а $1/8$ часть — на кружок по информатике; среди участников кружка по физике ровно $1/3$ часть ходит ещё и на кружок по математике, а ровно $1/5$ — на кружок по информатике; наконец, среди участников кружка по информатике ровно $1/7$ часть ходит на кружок по математике. А какая часть участников кружка по информатике ходит на кружок по физике?

$\frac{4}{35}$

4.4. (ММО, 2020, 10.2) Среди зрителей кинофестиваля было поровну мужчин и женщин. Всем зрителям понравилось одинаковое количество фильмов. Каждый фильм понравился восьми зрителям. Докажите, что не менее $3/7$ фильмов обладают следующим свойством: среди зрителей, которым фильм понравился, не менее двух мужчин.

5 Проценты

5.1. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.2, 9.1) Мудрый Гендальф сказал Фродо, что для того, чтобы перевести эльфийские мили в обычные, нужно разделить расстояние в эльфийских милях на 5 и полученное число уменьшить на 5%. Фродо решил, что для перевода из человеческих миль в эльфийские нужно расстояние в обычных милях умножить на 5 и полученное число увеличить на 5%. На сколько процентов от правильного значения расстояния в эльфийских милях он ошибётся, если будет так переводить?

На 0,25%

5.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.3, 7–9.2) Пятеро бегунов бежали эстафету. Если бы первый бежал в два раза быстрее, то они бы потратили на 5% меньше времени. Если бы второй бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы третий бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 12% меньше времени. Если бы четвёртый бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 15% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый бежал в два раза быстрее?

На 8%

5.3. («Курчатов», 2016, 8.1) Если у прямоугольника ширину увеличить на 30%, а высоту уменьшить на 20%, его периметр не изменится. А уменьшится или увеличится периметр, и на сколько процентов, если вместо этого у исходного прямоугольника ширину уменьшить на 20%, а высоту увеличить на 30%?

Увеличится на 10%

5.4. («Ломоносов», 2012, 7.6, 9.1) В результате проведённого в школе конкурса юных талантов призы получили 58% участников. Довольными итогами конкурса остались 95% участников, причём 60% из них получили призы. Какая часть недовольных участников конкурса получила призы?

20%

5.5. («Ломоносов», 2011, 7.5, 9.1) На какое наименьшее число процентов следует увеличить цену товара, чтобы, продавая его затем с 20%-ной скидкой от новой цены, не остаться в убытке, т. е. чтобы цена товара со скидкой была не меньше первоначальной?

25%

5.6. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.5, 7–8.4, 9.3) Фирма проводила опрос сотрудников — какими социальными сетями они пользуются: ВКонтакте или Одноклассниками. Некоторые сотрудники ответили, что используют ВКонтакте, некоторые — Одноклассников, некоторые сказали, что используют обе социальные сети, а 40 сотрудников сказали, что не пользуются соц. сетями. Среди всех, кто использует соц. сети, ВКонтакте используют 75%, а 65% — обе сети. Доля тех сотрудников, которые используют Одноклассников, от общего числа всех сотрудников равна $\frac{5}{6}$. Сколько всего сотрудников работает в фирме?

540

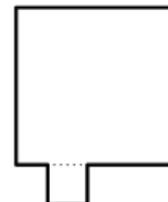
5.7. (ММО, 2009, 8.1) На доске написано:

В этом предложении ... процентов цифр делятся на 2, ... процентов цифр делятся на 3, а ... процентов цифр делятся и на 2 и на 3.

Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным.

5.8. (Всеросс., 2018, ШЭ, 10.1) Замок Персиваля имел квадратную форму. Однажды Персиваль решил расширить свои владения и добавил к замку квадратную пристройку. В результате периметр замка увеличился на 10%. На сколько процентов увеличилась площадь замка?

На 4%



5.9. (Всеросс., 2016, ШЭ, 11.1) За лето однокомнатная квартира подорожала на 21%, двухкомнатная — на 11%, а суммарная стоимость квартир — на 15%. Во сколько раз однокомнатная квартира дешевле двухкомнатной?

В 1,5 раза

5.10. (Всеросс., 2017, ШЭ, 11.1) Во время распродажи Пётр купил брюки с 40%-ной скидкой и рубашку с 20%-ной скидкой. На следующий день Иван купил такие же брюки и рубашку без скидок. Мог ли Иван заплатить в полтора раза больше, чем Пётр? Ответ обоснуйте.

5.11. (Всеросс., 2018, ШЭ, 11.2) Билет в кино стоил 300 рублей. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50 процентов, а выручка кинотеатра выросла на 35 процентов. Сколько рублей составляет цена одного билета теперь?

270

5.12. («Ломоносов», 2013, 10–11.1) На покраску дома жёлтой краски потребовалось больше, чем белой, на 20%, а коричневой краски — на 25% меньше, чем жёлтой. На сколько процентов коричневой и жёлтой краски суммарно потребовалось больше, чем белой?

На 110%

5.13. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.1) Брюки дешевле куртки, куртка дешевле пальто, пальто дешевле шубы, а шуба дешевле бриллиантового кольца на один и тот же процент. На сколько процентов шуба дороже брюк, если бриллиантовое кольцо дороже пальто в 6,25 раз?

На 1462,5%

5.14. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.1) После вырубki нескольких деревьев в парке оказалось, что число оставшихся деревьев равно числу процентов, на которое число деревьев в парке уменьшилось за время вырубki. Какое наименьшее число деревьев могло остаться в парке?

5.15. («Курчатов», 2019, 11.1) Петя и Вася участвовали в выборах на должность президента шахматного клуба. К полудню у Пети было 25% голосов, а у Васи — 45%. После полудня на голосование приходили только друзья Пети (и, соответственно, голосовали только за него). В итоге у Васи осталось только 27% голосов. Сколько процентов голосов набрал Петя?

55%

5.16. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3) Общий вес рюкзаков двух туристов за время похода уменьшился на $12\frac{1}{3}\%$. При этом вес рюкзака первого туриста уменьшился на 15%, а вес рюкзака второго — на 10%. Известно также, что в конце похода рюкзак второго туриста весил на 1,2 кг больше, чем рюкзак первого туриста в начале похода. Определите первоначальный вес рюкзаков каждого из туристов.

42 кг и 48 кг

6 Смеси и концентрации

6.1. (Всеросс., 2015, ШЭ, 8.3) Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов?

на 50%

6.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 7–8.4) Великий алхимик Теофраст фон Парацетамол приготовил колбу с водным раствором эликсира вечной молодости. Первому покупателю Теофраст продал $\frac{1}{2013}$ часть объёма колбы и затем долил колбу доверху дистиллированной водой. Второму покупателю он продал $\frac{1}{2012}$ часть объёма колбы и снова долил водой, и так далее. Последнему покупателю он продал $\frac{1}{2}$ колбы и снова долил колбу водой. В результате концентрация эликсира молодости в колбе стала равна 0,02%. Какова была изначальная концентрация эликсира?

40,26%

6.3. («Ломоносов», 2009.2) В свежих грибах содержание воды колеблется от 80% до 99%, а в сушёных — от 20% до 40%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

08

6.4. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.2) Незнайка собирается приготовить ко дню своего рождения три бочки малинового морса, смешивая малину с водой, причём процентное содержание малины в бочках будет таково, что если смешать содержимое бочек в отношении 1 : 2 : 3, то получится 10% морс, а если в пропорции 5 : 4 : 3, то получится 25% морс. Каким будет процентное содержание малины в морсе при смешивании равных количеств исходных трёх растворов? Каким планируется содержание малины в третьей бочке?

20%; 0

6.5. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.1) Ваня налил себе полный стакан смеси кофе с молоком. Сначала, выпив половину смеси, он долил в стакан доверху кофе и перемешал. Затем, выпив половину новой смеси, долил в стакан доверху молоко и вновь перемешал. Доля кофе в полученной смеси оказалась равной доле кофе в исходной. Найдите эту долю.

$\frac{3}{1}$

6.6. (ММО, 2015, 11.3) У Ивана-царевича есть два сосуда ёмкостью по 1 л, один из которых полностью заполнен обычной водой, а в другом находится a л живой воды, $0 < a < 1$. Он может переливать только из сосуда в сосуд любой объём жидкости до любого уровня без переполнений и хочет за конечное число таких переливаний получить 40-процентный раствор живой воды в одном из сосудов. При каких значениях a Иван-царевич сможет это сделать? Считайте, что уровень жидкости в каждом из сосудов можно точно измерить в любой момент времени.

$\frac{8}{3} \neq v$ ирЦ

7 Часы и время

7.1. (Всеросс., 2016, ШЭ, 8.2) Самолёт вылетел из Перми 28 сентября в полдень и прибыл в Киров в 11 часов утра (везде в задаче время отправления и прибытия указывается местное). В 19 часов того же дня самолёт вылетел из Кирова в Якутск и прибыл туда в 7 часов утра. Через три часа он вылетел из Якутска в Пермь и вернулся туда в 11 часов утра 29 сентября. Сколько времени самолёт находился в воздухе?

восемь 21

7.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–9.1) Часы Безумного Шляпника спешат на 15 минут в час, а часы Мартовского Зайца отстают на 10 минут в час. Однажды они поставили свои часы по часам Сони (которые остановились и всегда показывают 12:00) и договорились собраться в 5 часов вечера на традиционный файв-о-клок. Сколько времени Безумный Шляпник будет ждать Мартовского Зайца, если каждый приходит ровно в 17:00 по своим часам?

2 часа

7.3. («Ломоносов», 2011, 7–8.1) Сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками составляет 90° ?

44

7.4. («Ломоносов», 2019, 7–8.4, 9.3) Стрелочные часы показывают ровно час. Комар и муха сидят на одинаковом расстоянии от центра на часовой и минутной стрелках соответственно. Когда стрелки совпадают, насекомые меняются местами. Во сколько раз расстояние, которое за полсутки преодолел комар, больше расстояния, которое преодолела за это же время муха?

$\frac{73}{83}$

7.5. («Ломоносов», 2013, 9.4) Коля сел играть в WoW в момент, когда часовая и минутная стрелка были противоположны. Он закончил играть через целое число минут, причём в момент окончания минутная стрелка совпала с часовой. Сколько времени он играл (если известно, что он играл меньше 12 часов)?

восемь 6

7.6. («Ломоносов», 2009.8) Настенные часы сломались, отчего минутная стрелка стала в произвольные моменты времени мгновенно менять направление своего движения на противоположное, вращаясь со своей прежней угловой скоростью. Все потенциальные показания (в минутах) этой стрелки целиком заполняют промежуток $[0; 60)$.

а) Может ли такая стрелка в течение одного часа бесконечно много раз показать каждое из двух чисел 10 и 40?

б) Какое наибольшее количество раз в течение четырёх суток может встретиться самое редкое (за эти четверо суток) показание такой стрелки?

96 (9 'вГ (в

8 Возраст

8.1. (Всеросс., 2015, ШЭ, 9.2) В тот день, когда Диму поздравляли с днём рождения его брат и сестра, Дима сказал: «Смотрите, как интересно: я теперь вдвое старше брата и втрое старше сестры!» — «А ваш средний возраст 11 лет», — подхватил папа. Сколько лет исполнилось Диме?

81

8.2. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.2) Коле вдвое больше лет, чем было Оле, когда Коле было столько лет, сколько сейчас Оле. А когда Оле будет столько лет, сколько сейчас Коле, то им в сумме будет 36 лет. Сколько лет Коле сейчас?

91

8.3. (ОММО, 2016, 9–10.1) Вася и Маша поженились в 1994 году. С тех пор у них родились четверо детей, и новый 2015 год встречали уже все шестеро. По странному совпадению все дети родились 6 февраля, а сегодня, 7 февраля 2016 года, Вася заметил, что возраст старшего равен произведению возрастов трёх младших. Докажите, что в этой семье есть близнецы.

9 Разное

9.1. (Всеросс., 2020, ШЭ, 8.2) В классе за каждой партой сидят двое учеников. Парт, за которыми сидят двое мальчиков, вдвое больше, чем парт, за которыми сидят две девочки. А парт, за которыми сидят две девочки, вдвое больше, чем парт, за которыми сидят мальчик с девочкой. Сколько в классе мальчиков, если известно, что там 10 девочек?

81

9.2. (Всеросс., 2016, ШЭ, 8.3) На поляне собрались 25 гномов. Известно, что 1) каждый гном, который надел колпак, надел и обувь; 2) без колпака пришли 12 гномов; 3) босиком пришло 5 гномов. Каких гномов и на сколько больше: тех, кто пришёл в обуви, но без колпака, или тех, кто надел колпак?

Тех, кто надел колпак, на 6 больше

9.3. (*Всеросс., 2016, МЭ, 8.2*) Сорока-ворона кашу варила, деток кормила. Третьему птенцу досталось столько же каши, сколько первым двум вместе взятым. Четвёртому — столько же, сколько второму и третьему. Пятому — столько же, сколько третьему и четвёртому. Шестому — столько же, сколько четвёртому и пятому. А седьмому не досталось — каша кончилась! Известно, что пятый птенец получил 10 г каши. Сколько каши сварила сорока-ворона?

107

9.4. (*«Ломоносов», 2016, 5–8.6, 9.4*) Пете на день рождения подарили новый электролобзик, с функцией подсчёта длины сделанных пропилов. Чтобы опробовать подарок, Петя взял квадратный кусок фанеры со стороной 50 см и распилил его на квадраты со стороной 10 см и квадраты со стороной 20 см. Сколько всего квадратов получилось, если электролобзик показывает общую длину пропилов 2 м 80 см?

91

9.5. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 9.4, 10.3, 11.3*) Вася задумал два числа. Их сумма равна их произведению и равна их частному. Какие числа задумал Вася?

1 и $2/1$

9.6. (*Всеросс., 2014, МЭ, 11.1*) Серёжа и Миша, гуляя по парку, набрали на поляну, окружённую липами. Серёжа пошел вокруг поляны, считая деревья. Миша сделал то же самое, но начал с другого дерева (хотя пошел в ту же сторону). Дерево, которое у Серёжи было 20-м, у Миши было 7-м, а дерево, которое у Серёжи было 7-м, у Миши было 94-м. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

1001

9.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.1*) У Маши есть два разных стакана цилиндрической формы. Она заметила, что пакет муки можно так высыпать в эти стаканы, что уровень муки в первом стакане составит 12 см, а во втором — 10 см, или так, что уровень муки в первом стакане составит 9 см, а во втором — 12 см. На каком уровне окажется мука в каждом из этих стаканов, если муку из пакета высыпать в стаканы поровну?

13,5 см и 9 см

9.8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.2*) Футбольный мяч шьётся из 32 кусочков кожи: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный кусочек граничит только с белыми кусочками, каждый белый кусочек граничит с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько чёрных кусочков нужно для изготовления мяча?

121