Тригонометрические функции. Тангенс и котангенс

Мы начинаем с известного вам геометрического определения тангенса и котангенса — как отношения катетов прямоугольного треугольника.

Геометрическое определение

Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Угол, лежащий напротив катета a, обозначим α (рис. 1).

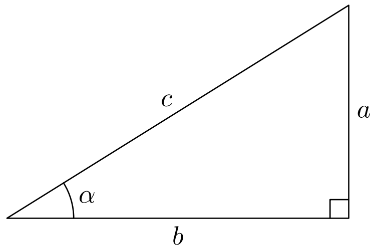

Рис. 1. $\operatorname{tg}\alpha = a/b$, $\operatorname{ctg}\alpha = b/a$

Тангенс угла α — это отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,. \tag{1}$$

Котангенс угла α — это отношение прилежащего катета к противолежащему катету:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}\,. \tag{2}$$

Значения тангенса и котангенса зависят только от угла α; выбор того или иного прямоугольного треугольника роли не играет.

Разделим на c числитель и знаменатель дроби в (1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a/c}{b/c}\,.$$

Как мы знаем, $a/c = \sin\alpha$ и $b/c = \cos\alpha$, поэтому:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,. \tag{3}$$

Поступив аналогично с равенством (2), получим:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,. \tag{4}$$

Отметим простое тождество:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Оно очевидно как из формул (1), (2), так и из формул (3), (4). Таким образом, котангенс — это величина, обратная тангенсу.

Тригонометрическое определение

Формулы (1), (2) определяют тангенс и котангенс острого угла. Теперь мы хотим распространить данные определения на произвольные углы. Это не составляет труда — на помощь приходят формулы (3) и (4). Мы получили их как следствия выражений (1) и (2), но ничто не мешает превратить их в определения!

Определение. Тангенс угла α — это отношение синуса α к косинусу α. Котангенс угла α — это, наоборот, отношение косинуса α к синусу α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Синус и косинус произвольных углов мы вычислять уже умеем, поэтому теперь мы получаем аналогичную возможность для тангенса и котангенса.

Линия тангенсов

Существует наглядная и очень полезная геометрическая интерпретация тангенса — с помощью так называемой линии тангенсов.

Линия тангенсов — это касательная к тригонометрической окружности, проведённая в точке $A(1;0)$. Линия тангенсов изображена на рис. 2.

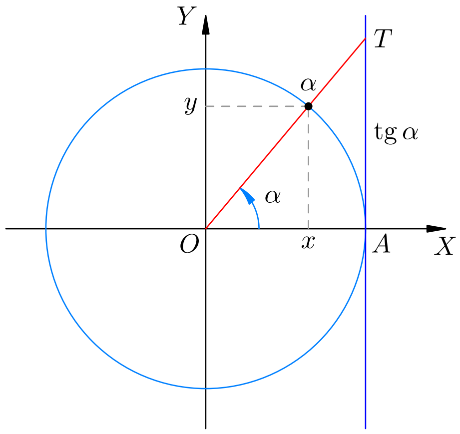

Рис. 2. Линия тангенсов

Возьмём для начала острый угол α. Соответствующая точка α расположена в I четверти. Проведём прямую, проходящую через точку α и начало координат O; эта прямая пересекает линию тангенсов в точке T (рис. 2).

Из тригонометрического определения тангенса вытекает, что $AT = \operatorname{tg}\alpha$. В самом деле, согласно определению:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$$

(здесь x и y — абсцисса и ордината точки α). Но из подобия прямоугольных треугольников $Ox\alpha$ и OAT имеем $y/x = AT/OA$. Поэтому:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT.$$

Получается, что тангенс угла α равен ординате точки T. Таким образом, мы приходим к следующему правилу наглядного представления тангенса на линии тангенсов.

Геометрическая интерпретация тангенса. Пусть α — некоторый угол. Проведём прямую через точку α и начало координат. Пусть эта прямая пересекает линию тангенсов в точке T. Тогда тангенс угла α равен ординате точки T.

Замечательно, что данная интерпретация справедлива для любого угла α (рис. 3). Действительно, с учётом знаков x и y из подобия треугольников $Ox\alpha$ и OAT легко установить, что отношение y/x (равное по определению $\operatorname{tg}\alpha$) в каждом случае оказывается равно ординате точки T. Убедитесь в этом самостоятельно!

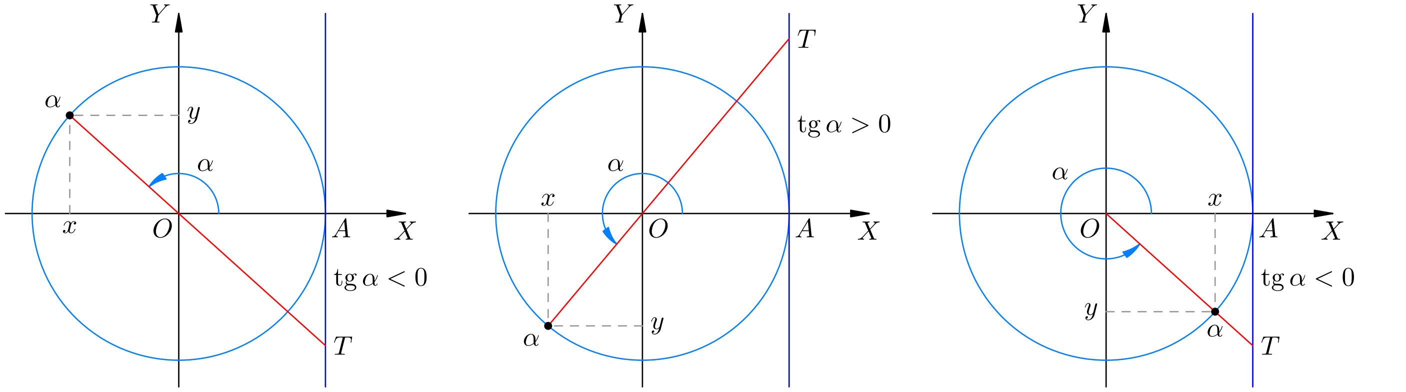

Рис. 3. Тангенс во II, III и IV четвертях. Во всех случаях $\operatorname{tg}\alpha = y_T$

Линия котангенсов

Наряду с рассмотренной выше геометрической интерпретацией тангенса существует аналогичная интерпретация котангенса — с помощью линии котангенсов.

Линия котангенсов — это касательная к тригонометрической окружности, проведённая в точке $B(0;1)$. Линия котангенсов изображена на рис. 4.

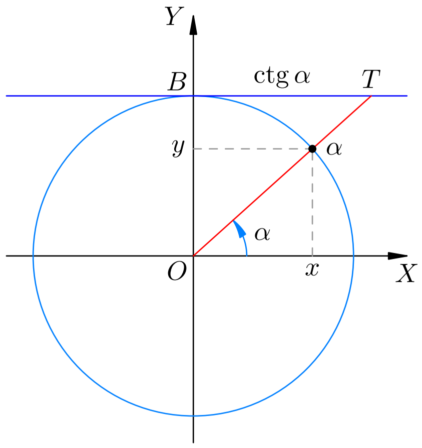

Рис. 4. Линия котангенсов

Снова начинаем с острого угла α. Соответствующая точка α расположена в I четверти. Проведём прямую через точку α и начало координат O; эта прямая пересекает линию котангенсов в точке T (рис. 4).

Тогда оказывается, что $BT = \operatorname{ctg}\alpha$. В самом деле, согласно тригонометрическому определению котангенса:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}\,.$$

Но из подобия прямоугольных треугольников $Oy\alpha$ и OBT имеем $x/y = BT/OB$. Поэтому:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{BT}{OB} = \frac{BT}{1} = BT.$$

Таким образом, котангенс угла α равен абсциссе точке T. Мы получаем следующий способ наглядного представления котангенса на линии котангенсов.

Геометрическая интерпретация котангенса. Пусть α — некоторый угол. Проведём прямую через точку α и начало координат. Пусть эта прямая пересекает линию котангенсов в точке T. Тогда котангенс угла α равен абсциссе точки T.

Данная интерпретация справедлива для любого угла α (рис. 5). Это устанавливается с помощью тех же рассуждений, что и в случае тангенса.

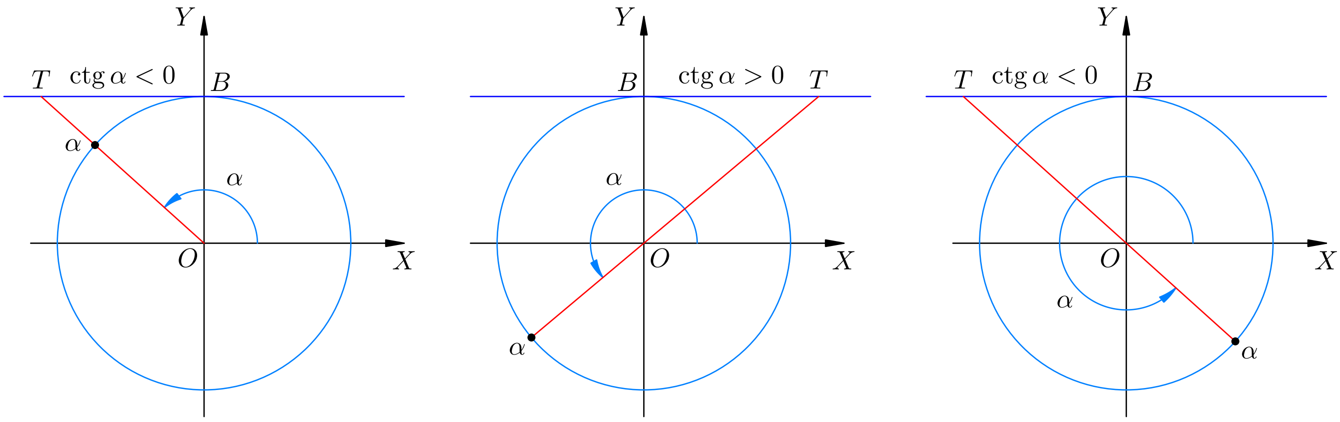

Рис. 5. Котангенс во II, III и IV четвертях. Во всех случаях $\operatorname{ctg}\alpha = x_T$

Табличные значения тангенса и котангенса

Табличными являются углы 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$. Синус и косинус этих углов нам уже известны, поэтому теперь мы можем найти соответствующие значения тангенса и котангенса (они называются *табличными значениями*).

1. *Нулевой угол.* Имеем: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, поэтому:

$$\operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{ctg} 0 \text{ не определён.}$$

2. *Угол* $\pi/6$. Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Соответственно,

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}.$$

3. *Угол* $\pi/4$. Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1,$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

4. *Угол* $\pi/3$. Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{1}/2} = \sqrt{3}\,,$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

5. *Угол* $\pi/2$. Имеем: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, поэтому:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \text{ не определён,} \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0.$$

График тангенса

Для наглядности укажем табличные значения тангенса на линии тангенсов (рис. 6).

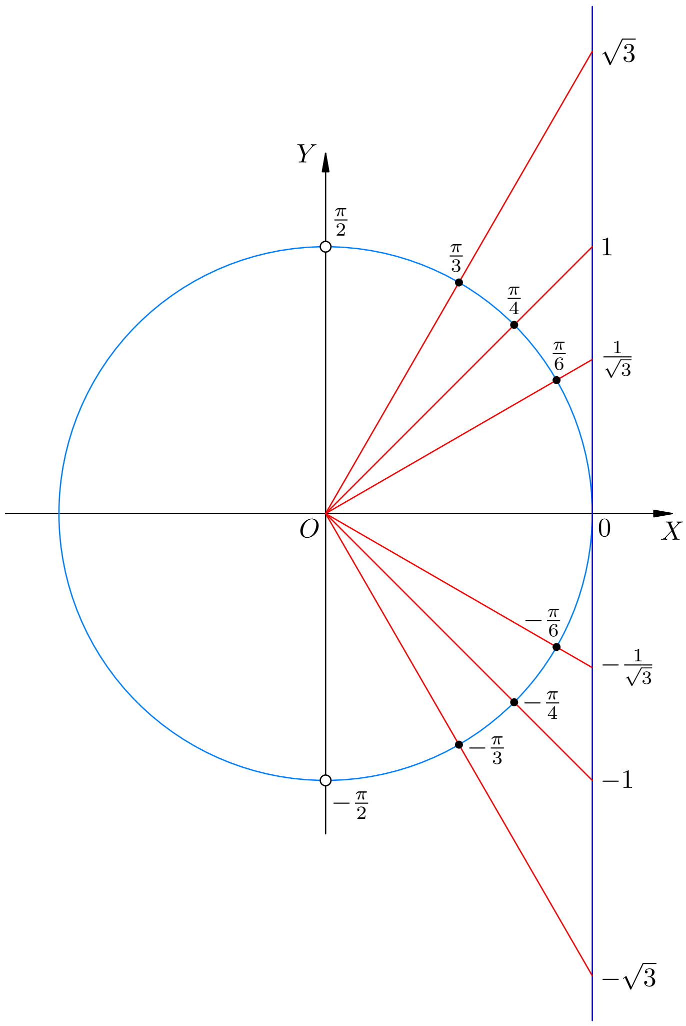

Рис. 6. Табличные значения на линии тангенсов

Из геометрической интерпретации тангенса очевидна его нечётность: $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому мы добавили на рисунок отрицательные углы и соответствующие отрицательные табличные значения.

Точки $\pm\pi/2$ изображены выколотыми: тангенс этих углов не определён (попытка вычислить тангенс такого угла приводит к делению на нуль). Прямая, проходящая через начало координат и данные точки, не пересекает линию тангенсов.

Изобразим на координатной плоскости полученное соответствие между табличными углами и значениями тангенса (рис. 7). По оси абсцисс отложен угол, по оси ординат — тангенс этого угла.

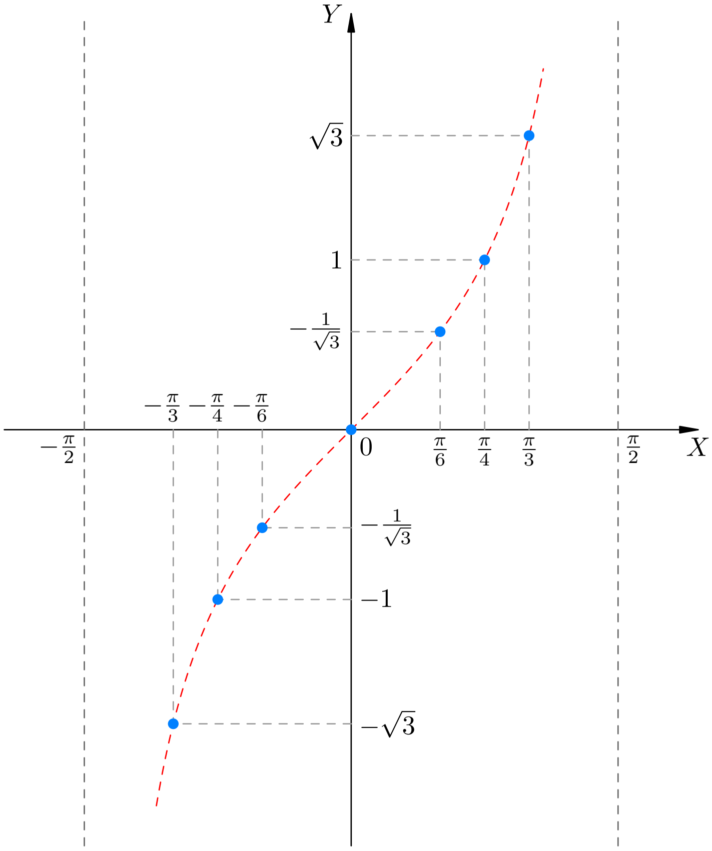

Рис. 7. Табличные значения тангенса: график

Точки ложатся на плавную кривую, которая служит графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Прямые $x = \pm\pi/2$ являются вертикальными асимптотами графика: если угол приближается к $\pm\pi/2$, то тангенс неограниченно возрастает по модулю.

Что будет за пределами интервала $(-\pi/2; \pi/2)$? Оказывается, ничего нового мы не получим, поскольку период тангенса равен π (рис. 8).

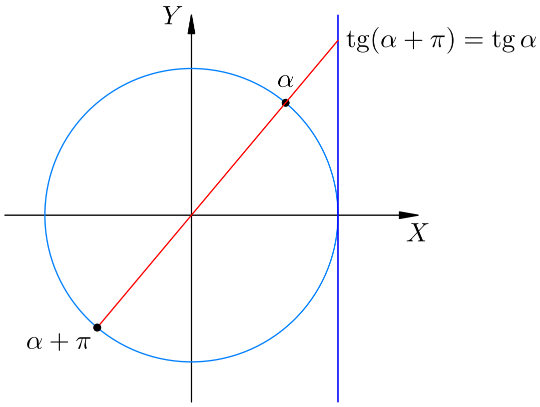

Рис. 8. Период тангенса равен π

Как видим, тангенс повторяет свои значения через каждые пол-оборота по тригонометрической окружности. Иными словами, для любого $x \neq \pi/2 + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ выполнено равенство:

$$\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Длина интервала $(-\pi/2; \pi/2)$ как раз равна периоду тангенса π. На этом интервале график уже построен. Следовательно, полный график функции $y = \operatorname{tg} x$ состоит из ветвей, которые получаются сдвигом построенной ветви на $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, … (рис. 9).

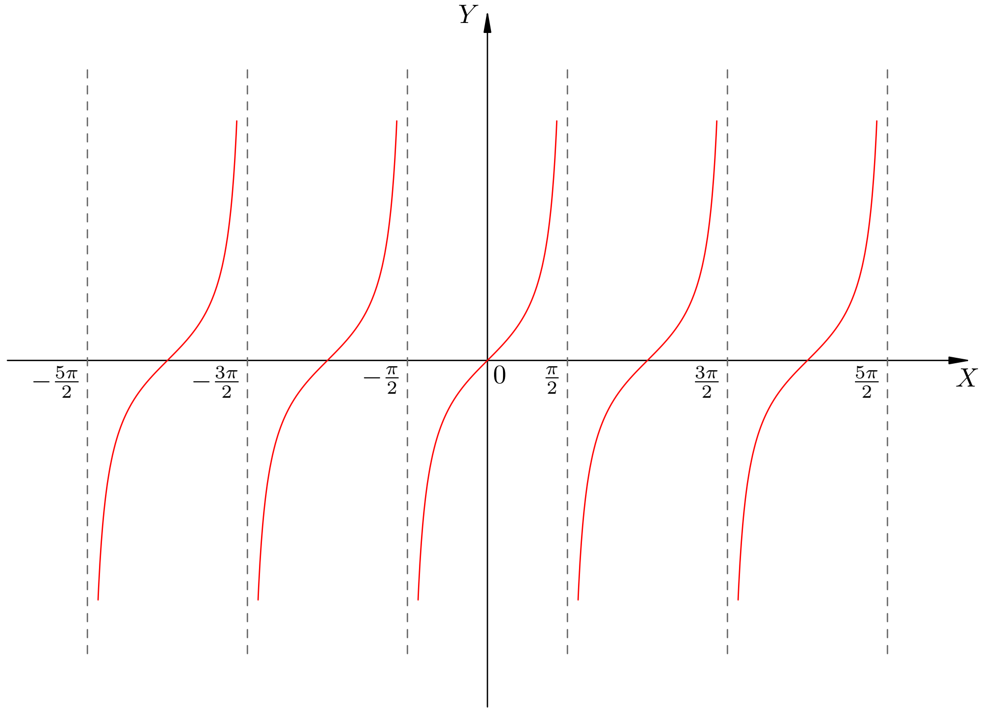

Рис. 9. График функции $y = \operatorname{tg} x$

В точках $x = \pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$, …, в которых тангенс не определён, расположены вертикальные асимптоты графика.

График котангенса

Начнём с того, что нанесём табличные значения котангенса на линию котангенсов (рис. 10).

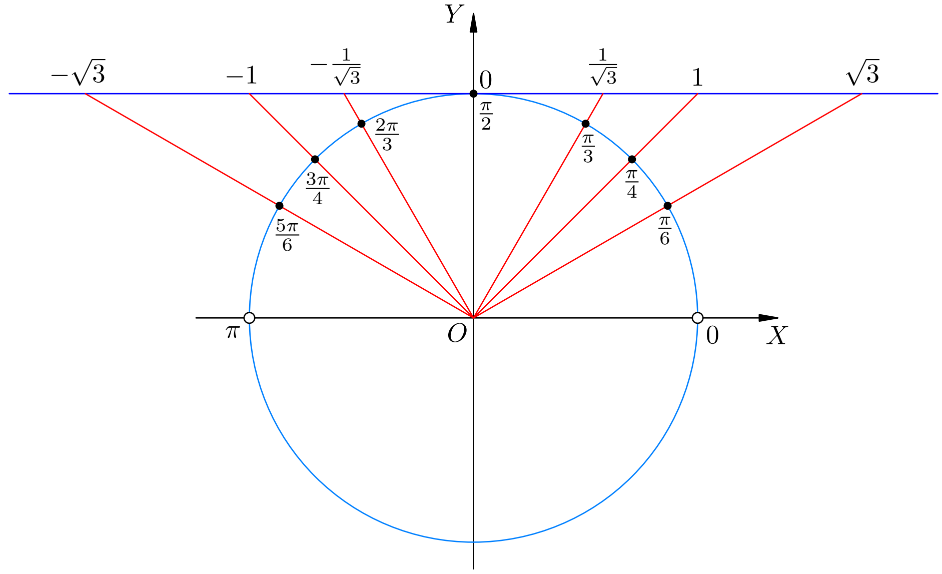

Рис. 10. Табличные значения на линии котангенсов

Точки 0 и π изображены выколотыми: котангенс этих углов не существует. Добавлены углы

$2\pi/3$, $3\pi/4$ и $5\pi/6$; значения котангенса этих углов очевидны из геометрической интерпретации котангенса.

Теперь изобразим ту же самую картину на графике (рис. 11). Точки ложатся на плавную кривую, которая служит графиком котангенса на интервале $(0;\pi)$.

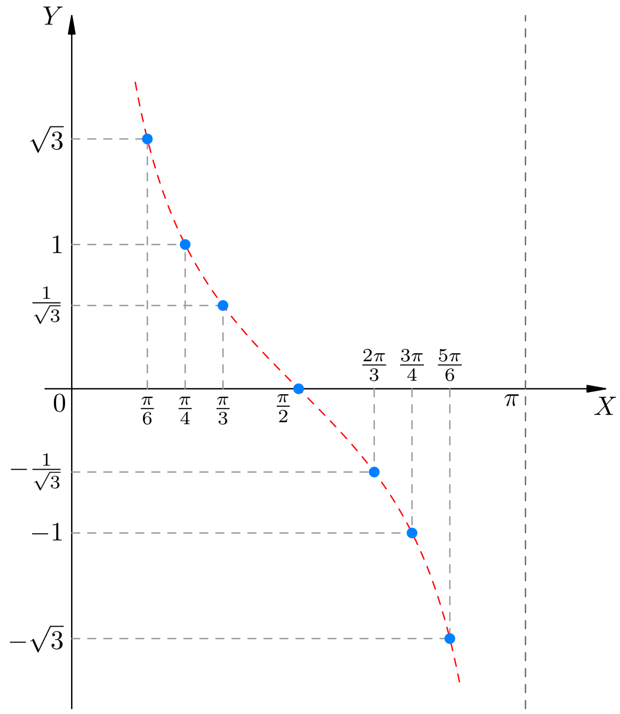

Рис. 11. Табличные значения котангенса: график

Период котангенса (как и тангенса) равен π, поэтому полный график функции $y = \operatorname{ctg} x$ состоит из ветвей, получающихся сдвигом построенной ветви на $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, …(рис. 12).

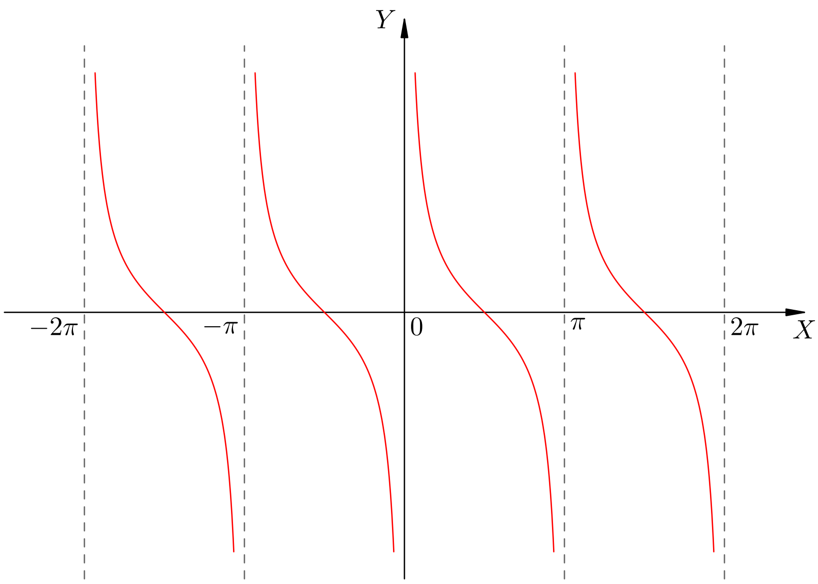

Рис. 12. График функции $y = \operatorname{ctg} x$

В точках $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, в которых котангенс не определён, расположены вертикальные асимптоты графика.

Основные свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Тангенс не определён в точках $\pi/2 + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, в которых косинус обращается в нуль. Поэтому

$$D(\operatorname{tg}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in \mathbb{Z}) \right\}.$$

Котангенс не определён в точках πn $(n \in \mathbb{Z})$, в которых синус обращается в нуль. Имеем:

$$D(\operatorname{ctg}) = \{ x \in \mathbb{R} \colon x \neq \pi n \ (n \in \mathbb{Z}) \}.$$

Тангенс и котангенс могут принимать любые значения. Иными словами, область значения этих функций есть множество всех действительных чисел:

$$E(\operatorname{tg}) = E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}.$$

Как уже отмечалось выше, период тангенса и котангенса равен π:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x.$$

Периодом будет и любое число πn с целым n:

$$\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x, \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Никакое другое число периодом этих функций не является. Таким образом, *наименьший положительный период* тангенса и котангенса равен π.

Тангенс — функция нечётная. В самом деле,

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

(мы воспользовались нечётностью синуса и чётностью косинуса). Аналогично, и котангенс является нечётной функцией:

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Ввиду нечётности тангенса и котангенса графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ симметричны относительно начала координат. Посмотрите ещё раз на рис. 9 и 12 и убедитесь в том, что указанная центральная симметрия действительно присутствует.

Задачи

1. Вычислите: а) $\sin \frac{17\pi}{4}$; б) $\cos \frac{23\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg} \frac{35\pi}{6}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{25\pi}{4}$; д) $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$; е) $\cos\left(-\frac{43\pi}{4}\right)$; ж) $\operatorname{tg}\left(-\frac{43\pi}{3}\right)$; з) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{53\pi}{6}\right)$ и) $\sin \frac{100\pi}{3}$; к) $\cos\left(-\frac{1001\pi}{6}\right)$.

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 1; д) $-\frac{1}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $-\sqrt{3}$; з) $\sqrt{3}$; и) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; к) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Определите знак выражения: а) $\sin \frac{3\pi}{5}$; б) $\cos \frac{10\pi}{7}$; в) $\operatorname{tg} \frac{27\pi}{7}$; г) $\sin 1$; д) $\cos 2$; е) $\operatorname{tg} 3$; ж) $\operatorname{ctg} 4$; з) $\cos 5$; и) $\sin 6$; к) $\operatorname{tg} 7$; л) $\operatorname{ctg} 8$.

а) +; б) −; в) −; г) +; д) −; е) −; ж) +; з) +; и) −; к) +; л) −

3. Определите знак выражения: а) $\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7}$; б) $\cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}$; в) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{11} - \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{11}$.

а) +; б) −; в) +; г) −

4. Может ли функция $y = \sin x$ принимать значения: а) $2/3$; б) $-3/2$; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}/3$; д) $\pi/3$?

а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет

5. Может ли функция $y = \cos x$ принимать значения: а) $-3/4$; б) $0{,}99$; в) $-1{,}001$; г) $\sqrt{10}/3$; д) $7\pi/22$?

а) да; б) да; в) нет; г) нет; д) да

6. Может ли функция $y = \operatorname{tg} x$ принимать значения: а) 2; б) -10; в) 100; г) -1000?

а) да; б) да; в) да; г) да

7. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = 1$.

а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0, 2π

8. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\sin x = -1$; б) $\cos x = -1$.

а) $\frac{3\pi}{2}$; б) π

9. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\sin x = 0$; б) $\cos x = 0$.

а) 0, π, 2π; б) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$

10. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\cos x = \frac{1}{2}$.

а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$

11. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

а) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$

12. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$

13. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\sin x = -\frac{1}{2}$; б) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

а) $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; б) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$

14. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

а) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$

15. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$

16. Найдите все значения x из промежутка $[0; 2\pi]$ такие, что: а) $\operatorname{tg} x = 0$; б) $\operatorname{tg} x = 1$; в) $\operatorname{tg} x = -1$; г) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; ж) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

а) 0, π, 2π; б) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$; в) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$; д) $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$; ж) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

17. Найдите все значения x из промежутка $[-2\pi; 0]$ такие, что $\cos x = \frac{1}{2}$.

$-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$

18. Найдите все значения x из промежутка $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ такие, что $|\sin x| = \frac{1}{2}$.

$\boxed{-\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}}$

19. Найдите все значения x из промежутка $[2\pi; 3\pi]$ такие, что $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\frac{9\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4}}$