Системы точек и отрезков

Задача 1. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) На прямой отмечено четыре точки и ещё одна точка отмечена вне прямой. Всего существует шесть треугольников с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными?

Задача 2. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) На прямой отмечено 100 точек, и ещё одна точка отмечена вне прямой. Рассмотрим все треугольники с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными?

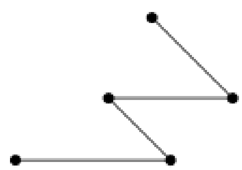
Задача 3. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) На окружности отмечено 100 точек. Эти точки нумеруются числами от 1 до 100 в некотором порядке.

а) Докажите, что при любой нумерации точки можно разбить на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были нечётными.

б) Верно ли, что при любой нумерации можно разбить точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были чётными?

Задача 4. (*Турнир городов, 2013, 8–9*) На плоскости даны шесть точек. Известно, что их можно разбить на две тройки так, что получатся два треугольника. Всегда ли можно разбить эти точки на две тройки так, чтобы получились два треугольника, которые не имеют друг с другом никаких общих точек (ни внутри, ни на границе)?

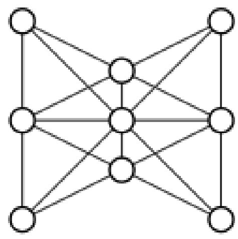
Задача 5. (*ММО, 2014, 8*) Будем называть *змейкой* ломаную, у которой все углы между соседними звеньями равны, причём для любого некрайнего звена соседние с ним звенья лежат в разных полуплоскостях от этого звена (пример змейки см. на рисунке). Барон Мюнхгаузен заявил, что отметил на плоскости 6 точек и нашёл 6 разных способов соединить их (пятизвенной) змейкой (вершины каждой из змеек — отмеченные точки). Могут ли его слова быть правдой?



Задача 6. (*ММО, 2012, 8*) На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары, после чего соединяет точки в каждой из пар отрезком. Всегда ли он может это сделать так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

Задача 7. (*ММО, 2014, 8*) На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (см. рисунок). Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда от них отличается.

Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей надо заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?



Задача 8. (*ММО, 2014, 9–10*) В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

Задача 9. (*ММО, 2019, 10.6, 11.6*) Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0,0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)