Правила суммы и произведения

Содержание

Правило суммы и правило произведения — основные комбинаторные принципы, которые используются в комбинаторике повсеместно.

1 Правило суммы

Правило суммы мы уже фактически использовали в задаче про карточки, разобранной в конце предыдущего раздела. Проиллюстрируем его ещё на двух элементарных задачах.

Задача. На подносе лежат 5 яблок и 3 груши. Сколькими способами можно выбрать фрукт с подноса?

Решение. Яблоко можно выбрать пятью способами. Грушу можно выбрать тремя способами. Стало быть, один из этих фруктов можно выбрать $5 + 3 = 8$ способами.

Задача. На полке стоят десять томов Пушкина, четыре тома Лермонтова и шесть томов Гоголя. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?

Решение. Понятно, что $10 + 4 + 6 = 20$ способами.

Правило суммы. Пусть объект a можно выбрать m способами, а объект b можно выбрать n способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо a, либо b» можно сделать $m + n$ способами.

Более общим образом, пусть объект a_1 можно выбрать n_1 способами, объект a_2 можно выбрать n_2 способами, ..., объект a_k можно выбрать n_k способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо a_1, либо a_2, ..., либо a_k» можно осуществить $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Правило суммы отражает тот очевидный факт, что число элементов в объединении попарно непересекающихся множеств равно сумме числа элементов в каждом из множеств. Так, в первой задаче множество яблок (Я) состоит из пяти элементов, а множество груш (Г) состоит из трёх элементов; эти множества не пересекаются, так что множество фруктов (Я $\cup$ Г) состоит из $5+3$ элементов. Аналогично, во второй задаче множество П $\cup$ Л $\cup$ Г (обозначения очевидны) состоит из $10+4+6$ элементов. Соответственно, имеем вторую (эквивалентную) формулировку правила суммы.

Правило суммы в терминах множеств. Пусть множество A состоит из m элементов, а множество B состоит из n элементов, причём множества A и B не пересекаются. Тогда множество $A \cup B$ состоит из $m + n$ элементов.

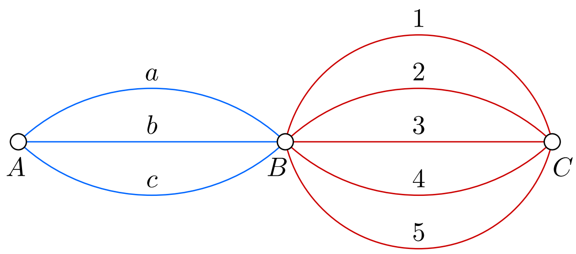
Более общим образом, пусть множество A_1 состоит из n_1 элементов, множество A_2 состоит из n_2 элементов, ..., множество A_k состоит из n_k элементов, и множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ попарно не пересекаются. Тогда множество $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ состоит из $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ элементов.

2 Правило произведения

При решении комбинаторных задач часто приходится умножать число способов выбора одного объекта на число способов выбора другого объекта. Рассмотрим некоторые примеры.

Задача. Имеются три города: A, B и C. Из A в B ведут три дороги, из B в C — пять дорог. Сколько различных путей ведут из A в C? Прямого пути между A и C нет.

Решение. Обозначим дороги буквами и цифрами. Именно, дороги из A в B назовём a, b, c; дороги из B в C назовём 1, 2, 3, 4, 5.



Тогда любой маршрут из A в C получает уникальное имя в виде пары из буквы и цифры. Например, маршрут $b4$ означает, что из A и B мы пошли по дороге b, а из B в C — по дороге 4. Выпишем все такие пары в виде таблицы:

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$
$b1$	$b2$	$b3$	$b4$	$b5$
$c1$	$c2$	$c3$	$c4$	$c5$

Всего получилось $3 \cdot 5 = 15$ маршрутов. Как видим, число маршрутов равно *произведению* числа дорог из A в B на число дорог из B в C.

Задача. В магазине есть 7 видов пиджаков, 5 видов брюк и 4 вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

Решение. Предположим, что пиджак уже выбран (это можно сделать 7 способами). К пиджаку выбираем брюки 5 способами. Итого пару (пиджак, брюки) можно выбрать $7 \cdot 5$ способами. К этой паре можно купить галстук 4 способами. Следовательно, для покупки пиджака, брюк и галстука имеется $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ способов.

Задача. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры чётные?

Решение. Представим себе пять последовательных позиций для цифр пятизначного числа. На первую позицию можно поставить четыре цифры: 2, 4, 6 или 8. На вторую позицию можно поставить пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. На третью, четвёртую и пятую позиции можно поставить те же пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. Всего имеем $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$ вариантов заполнения позиций; именно столько и будет искомых чисел.

Вы уже, несомненно, уловили суть второго правила комбинаторики — правила произведения. Остаётся дать его строгую формулировку.

Правило произведения. Пусть объект a можно выбрать m способами, после чего объект b можно выбрать n способами. Тогда упорядоченную пару (a, b) можно выбрать mn способами; иными словами, существует mn различных упорядоченных пар (a, b).

Более общим образом, пусть объект a_1 можно выбрать n_1 способами, после чего объект a_2 можно выбрать n_2 способами, ..., после чего объект a_k можно выбрать n_k способами. Тогда цепочку $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ можно выбрать $n_1 n_2 \ldots n_k$ способами; иными словами, существует $n_1 n_2 \ldots n_k$ цепочек $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Задача. Сколько подмножеств у 5-элементного множества? У n-элементного?

Решение. Пусть имеется множество из 5 элементов $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Каждому его подмножеству B можно дать уникальное имя в виде упорядоченной пятёрки нулей и единиц по следующему правилу: если на i-й позиции пятёрки стоит единица, то $a_i \in B$; если же на i-й позиции пятёрки стоит нуль, то $a_i \notin B$.

Например, пятёрка 10010 обозначает подмножество $\{a_1, a_4\}$. Пятёрки 00000 и 11111 обозначают соответственно пустое множество и само множество A.

Таким образом, у множества A имеется ровно столько подмножеств, сколько существует упорядоченных пятёрок из нулей и единиц. Каждую позицию пятёрки можно заполнить двумя способами (0 или 1), поэтому таких пятёрок $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$. Это и есть число подмножеств 5-элементного множества.

Для n-элементного множества рассуждение аналогично. Каждое его подмножество получает уникальное имя (по тому же правилу) в виде цепочки длины n, состоящей из нулей и единиц. Всего таких цепочек 2^n. Следовательно, *число всех подмножеств n-элементного множества равно* 2^n.

Задача. (*Размещения с повторениями*) Сколькими способами можно разложить m различных шаров в n различных ящиков? На число шаров в ящике ограничений нет.

Решение. Представим себе m клеток (это шары). В каждую клетку можно вписать любое число от 1 до n (номер ящика, в который кладётся шар). Всего получится n^m всевозможных способов заполнить клетки, то есть разложить шары по ящикам.

Число разложений m различных шаров по n различным ящикам (без ограничений на число шаров в ящике) называется иногда *числом размещений с повторениями из n по m* и обозначается $\bar{A}_n^m$. Таким образом, $\bar{A}_n^m = n^m$. О более содержательном понятии — числе размещений (без повторений) — речь пойдёт в следующем разделе.

Задача. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа; $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые неотрицательные числа. Сколько делителей у числа $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$?

Решение. Каждый делитель числа a имеет вид $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}$, где целые числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ удовлетворяют условиям $0 \leqslant m_1 \leqslant k_1$, $0 \leqslant m_2 \leqslant k_2$, $\ldots$, $0 \leqslant m_n \leqslant k_n$. Следовательно, цепочка $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ есть уникальное имя делителя, и потому делителей будет столько же, сколько получится цепочек $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Первый элемент этой цепочки можно выбрать $k_1 + 1$ способами, второй элемент $k_2 + 1$ способами, $\ldots$, n-й элемент $k_n + 1$ способами. Значит, всего имеется $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1)$ делителей числа a.

В комбинаторной задаче могут использоваться также факты, связанные с делимостью.

Задача. (*«Физтех», 2013, 9–11*) Сколько пар натуральных чисел (x, y) удовлетворяют равенству $\text{НОД}(x, y) + \text{НОК}(x, y) = 2011$?

Решение. Напомним для начала некоторые простые факты касательно НОД и НОК. Они наверняка пригодятся вам на олимпиадах.

Пусть $\text{НОД}(x, y) = d$. Тогда $x = ad$ и $y = bd$ для некоторых натуральных a и b. При этом числа a и b являются взаимно простыми (то есть не имеют общих делителей, кроме 1). В самом деле, если у a и b есть общий делитель $c > 1$, то число cd будет общим делителем чисел x и y. Но это противоречит тому, что d — наибольший общий делитель этих чисел.

Пусть z есть общее кратное чисел x и y (не обязательно наименьшее). Поскольку z делится на x и на y, имеем: $z = kx = kad$ и $z = my = mbd$ для некоторых натуральных k и m. Отсюда $kad = mbd$, то есть $ka = mb$; но так как a и b взаимно просты, то m делится на a: $m = na$ для некоторого натурального n. Следовательно, $z = nabd$, откуда видно, что *наименьшее* общее кратное получается при $n = 1$: $\text{НОК}(x, y) = abd$.

Заметим попутно, что НОД$(x, y) \cdot$ НОК$(x, y) = d \cdot abd = ad \cdot bd = xy$. Мы доказали тем самым известный факт: *произведение НОД и НОК двух чисел равно произведению этих чисел.*

Теперь переходим к решению задачи. Имеем:

$$2011 = d + abd = d(1 + ab).$$

Отсюда следует, что 2011 делится на $1 + ab > 1$. Однако 2011 — простое число (убедитесь в этом самостоятельно), поэтому единственным его делителем, большим единицы, может быть лишь оно само: $1 + ab = 2011$, откуда $ab = 2010$. Тогда $d = 1$, то есть $x = a$ и $y = b$.

Задача свелась к следующему вопросу: сколько пар натуральных чисел (a, b) удовлетворяют равенству $ab = 2010$? Из этого равенства b однозначно определяется по a; поэтому фактически нам надо выяснить, сколько делителей a имеется у числа 2010.

Для этого раскладываем 2010 на простые множители: $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Дальнейшее рассуждение вам уже знакомо: каждый делитель числа 2010 имеет вид $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 67^s$, где числа p, q, r, s могут принимать значения 0 или 1. Поэтому количество делителей числа 2010 равно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Это и есть искомое число пар (x, y).

Часто в задачах работают одновременно оба правила — суммы и произведения.

Задача. Сколько трёхзначных чисел содержат ровно одну цифру 7?

Решение. Единственная цифра 7 может стоять либо на первом месте, либо на втором, либо на третьем. Соответственно находим количества чисел в каждом из этих случаев, после чего пользуемся правилом суммы.

Найдём количество n_1 трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 будет первой. На второй и третьей позициях может стоять любая из цифр, кроме 7; следовательно, вторую и третью позицию мы можем заполнить $9 \cdot 9 = 81$ способами. Итак, $n_1 = 81$.

Теперь найдём количество n_2 трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на втором месте. Первая цифра может быть любой, кроме 0 и 7 (то есть 8 способов выбора). Вторая цифра — любая, кроме 7 (это 9 способов). Следовательно, $n_2 = 8 \cdot 9 = 72$.

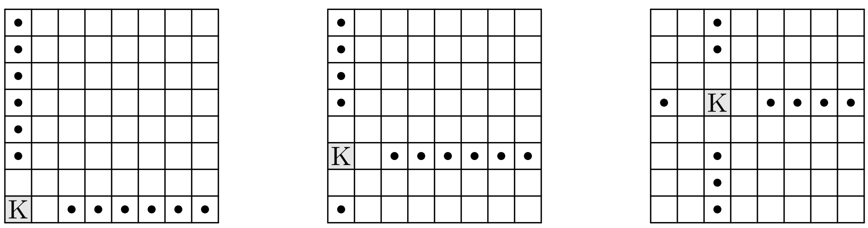
Аналогично находим количество n_3 трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на третьем месте: $n_3 = 8 \cdot 9 = 72$.

По правилу суммы искомое количество чисел равно $n_1 + n_2 + n_3 = 81 + 72 + 72 = 225$.

Задача. (*«Высшая проба», 2014, 8*) Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8×8 белую ладью и чёрного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью? Способы расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски, считаются разными.

Решение. Где бы ни стояла на доске ладья, она держит под боем ровно 14 клеток — 7 по горизонтали и 7 по вертикали.

Если король стоит в углу доски (таких клеток 4), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт две клетки. Значит, ладью можно поставить на 12 клеток (рисунок слева).



Если король стоит на краю доски, но не в углу (таких клеток 24), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт три клетки. Значит, ладью можно поставить на 11 клеток (рисунок в центре).

Если же король стоит не на краю доски (таких клеток 36), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт четыре клетки. В этом случае ладью можно поставить на 10 клеток (рисунок справа).

Всего требуемых расстановок короля и ладьи получается

$$4 \cdot 12 + 24 \cdot 11 + 36 \cdot 10 = 672.$$

3 Задачи

1. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 5–6.5, 7–8.4, 9.3*) Вася придумывает 4-значный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует её. Кроме того он не любит, когда две одинаковые цифры стоят рядом. А ещё он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль?

$\boxed{504}$

2. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.3, 9.2*) Петя придумывает пароль для своего смартфона. Пароль состоит из 4 десятичных цифр. Петя хочет, чтобы пароль не содержал цифру 7, при этом в пароле должны быть хотя бы две (или более) одинаковые цифры. Сколькими способами Петя может это сделать?

$\boxed{3537}$

3. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 5–6.6, 7–8.6, 9.5*) Сколькими способами можно разложить число 10000 на три натуральных множителя, ни один из которых не делится на 10? Считаем, что разложения, отличающиеся только порядком сомножителей, не различаются.

$\boxed{5}$

4. (*«Физтех», 2016, 5–8*) Два натуральных числа назовём *близкими взаимно простыми*, если они взаимно простые и различаются не больше чем на 3. Найдите количество пар близких взаимно простых чисел, расположеных между 50 и 150 включительно.

$\boxed{214}$

5. (*«Ломоносов», 2016, 5–6.4, 7–8.4*) Сколько чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат ни одной из цифр 6, 7, 8, 9 или 0?

$\boxed{31}$

6. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 5–6*) Найдите количество пар натуральных чисел (x, y), $1 \leqslant x, y \leqslant 1000$, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 5 нацело.

$\boxed{360000}$

7. (*Математический праздник, 1996, 6.3*) Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

$\boxed{\text{Поровну}}$

8. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 7.3, 8.3, 9.3*) Назовём число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 — зеркальное. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?

$\boxed{100}$

9. (*«Физтех», 2015, 7*) Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых третья цифра меньше четвёртой на 2.

$\boxed{720}$

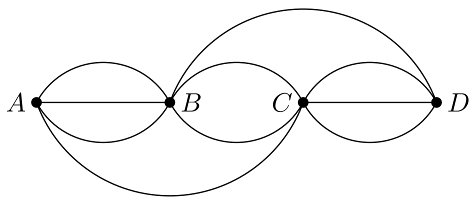
10. (*«Физтех», 2016, 8*) В пятизначном числе $*5*3*$ некоторые цифры заменены звёздочками. Известно, что это число делится на 15. Найдите количество таких пятизначных чисел.

$\boxed{60}$

11. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10.5*) На числовой прямой закрашивают красным и синим цветом точки с целыми координатами по следующим правилам: а) точки, разность координат которых равна 7, должны быть покрашены одним цветом; б) точки с координатами 20 и 14 должны быть покрашены красным, а точки с координатами 71 и 143 — синим. Сколькими способами можно раскрасить все целые числа, соблюдая эти правила?

$\boxed{8}$

12. (*«Ломоносов», 2012, 7*) Города A, B, C и D соединены дорогами так, как показано на рисунке.



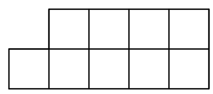
Сколькими способами можно проделать путь из города A в город D, побывав в каждом городе ровно по одному разу?

$\boxed{20}$

13. (*«Ломоносов», 2015, 7.3*) Таблицу размера 3×3 надо заполнить числами 2014, 2015 и 2016 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была одинаковой. Сколькими различными способами можно это сделать?

$\boxed{831}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–9*) Сколькими способами можно разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в девяти клетках фигуры, изображённой на рисунке, так, чтобы сумма чисел в каждом столбце, начиная со второго, была на 1 больше, чем в предыдущем?



$\boxed{32}$

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7–8*) Пин-код телефона состоит из 4 цифр (и может начинаться с нуля, например, 0951). Петя называет «счастливыми» такие пин-коды, у которых сумма крайних цифр равна сумме средних, например 1357: $1+7=3+5$. В своём телефоне он использует только «счастливые» пин-коды. Петя говорит, что даже если забудет одну цифру (но будет помнить её позицию), то он легко её восстановит. А если он забудет две цифры (но будет помнить их позиции), то ему придется перебрать лишь небольшое количество пин-кодов.

а) Сколько пин-кодов придется перебрать Пете в худшем случае?

б) Сколько существует всего «счастливых» пин-кодов?

а) 10; б) 670

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.6, 9.5*) Сколько существует пятизначных чисел вида $\overline{ab16c}$, кратных 16? (a, b, c — произвольные цифры, не обязательно разные.)

90

17. (*«Высшая проба», 2014, 8*) Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8×8 белого слона и чёрного короля так, чтобы слон бил короля, но король не бил слона?

364

18. (*«Физтех», 2018, 9*) Каких целых чисел от 1 до 60 000 (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

Вторых на 780

19. (*«Физтех», 2018, 10*) Каких целых чисел от 1 до $8\cdot 10^{20}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

Вторых на $\frac{5}{4}(5^{20}-1)$

20. (*«Ломоносов», 2016, 9.5*) Сколько существует четырёхзначных чисел, обладающих следующими свойствами: все цифры числа чётные; число кратно четырём; если зачеркнуть последнюю цифру, то полученное трёхзначное число не кратно четырём?

120

21. (*«Физтех», 2016, 9–11*) В числе $2{*}0{*}1{*}6{*}0{*}$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

1458

22. (*«Физтех», 2016, 9–11*) В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

1728

23. (*«Высшая проба», 2014, 9*) Из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ выбираются три натуральных числа a, b, c (не обязательно различных). Сколько существует способов сделать это так, чтобы число $a^{(b^c)}$ делилось на 4?

$\boxed{28}$

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 11.1*) Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых нет цифр 4, 5, 6, 8?

$\boxed{180}$

25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.1*) Сколько натуральных чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат в десятичной записи ни одной из цифр 3, 4, 5, 7 и 9?

$\boxed{49}$

26. (*«Ломоносов», 2013, 7.6*) Сколькими различными способами шахматный король может пройти с поля $e1$ на поле $h5$, если ему разрешается ходить только на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо вверх?

$\boxed{129}$

27. (*«Ломоносов», 2013, 8.7*) Сколькими различными способами шахматный ферзь может пройти с поля $d1$ на поле $h8$, если ему разрешается ходить только вправо, вверх или по диагонали вправо вверх на любое число клеток?

$\boxed{39625}$

28. (*«Ломоносов», 2013, 8.5*) Найдите количество девятизначных чисел, в которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно один раз, цифры 1, 2, 3, 4, 5 расположены в порядке возрастания, а цифра 6 стоит раньше цифры 1 (например, 916238457).

$\boxed{504}$

29. (*Московская устная олимпиада, 2019, 7.9*) Сколькими способами можно заполнить цифрами клетки квадрата размером 3×3 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце сумма цифр была равна 7, а ненулевые цифры не повторялись?

$\boxed{216}$

30. (*«Ломоносов», 2015, 8.5, 9.1*) В некоторой стране алфавит состоит из трёх букв: М, Г и У. Словом называется любая состоящая из этих букв конечная последовательность, в которой две согласные не могут стоять рядом и две гласные не могут стоять рядом. Сколько в этой стране состоящих из 200 букв слов, которые содержат каждую из трёх букв хотя бы по разу?

$\boxed{2^{101} - 4}$

31. (*«Физтех», 2013, 8–11*) Имеется желоб, по которому в обе стороны могут кататься одинаковые шарики с фиксированной скоростью. Если два шарика соударяются, каждый из них меняет направление своего движения на противоположное. С одного конца желоба двигаются пять шариков на равных расстояниях друг от друга, с другого конца — семь шариков (тоже на равных расстояниях друг от друга). Сколько всего будет соударений?

$\boxed{35}$

32. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9*) Числа $1, 2, \ldots, 9$ расставлены в квадрате 3×3. Будем называть *фэншуйными* такие расстановки, у которых при выборе любых трёх клеток, расположенных в разных столбцах и разных строках, сумма чисел, стоящих в выбранных клетках, будет равна 15. Пример фэншуйной расстановки приведён на рисунке.

4	**1**	7
6	3	9
5	2	**8**

$1+6+8=15$

Найдите число всех фэншуйных расстановок.

72

33. (*«Физтех», 2017, 10–11*) Дано число $5300\ldots0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

22100

34. (*«Физтех», 2012, 11*) Найдите количество пар целых чисел (a, b) таких, что $1 \leqslant a \leqslant 700$, $1 \leqslant b \leqslant 700$, сумма $a+b$ делится на 7, а произведение ab делится на 5. (При $a \neq b$ пары (a, b) и (b, a) считаются различными.)

25200

35. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих условию $6x^2 - 7xy + y^2 = 10^{100}$.

19998

36. (*«Физтех», 2014, 11*) Найдите, сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x^7y^2 = 12^{55} \cdot 15^{30}.$$

144

37. (*«Ломоносов», 2018, 10–11.8*) Андрею нравятся все числа, не делящиеся на 3, а Тане нравятся все числа, в которых нет цифр, делящихся на 3.

а) Сколько четырёхзначных чисел нравятся и Андрею, и Тане?

б) Найдите общую сумму цифр всех таких четырёхзначных чисел.

а) 810; б) 14580

38. (*ММО, 2016, 9.6*) В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно три языка, причём для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно k. Оказалось, что $11n \leqslant k \leqslant m/2$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.