Суммирование

1. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.4*) Решите уравнение:

$$(x+1)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+\ldots+(x+2021)^2=x^2+(x-2)^2+(x-4)^2+\ldots+(x-2020)^2.$$

$\boxed{-\frac{1}{2}}$

2. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 10.1, 11.1*) Если число 100^{10} записать в виде суммы десяток $10+10+\ldots$, то сколько получится слагаемых?

$\boxed{10^{19}}$

3. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 10.2*) Вычислите:

$$\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\frac{7+8}{9}+\ldots+\frac{2017+2018}{2019}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{673}\right).$$

$\boxed{1346}$

4. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 10.5*) Лёша не поленился вычислить сумму

$$9+99+999+\ldots+\underbrace{9\ldots9}_{2017}$$

и выписать её на доску. Сколько раз в итоговом результате записана цифра 1?

$\boxed{2013}$

5. (*ОММО, 2017.1*) Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{12+15}{18}+\frac{21+24}{27}+\ldots+\frac{48+51}{54}.$$

$\boxed{\frac{171}{20}}$

Основной приём вычисления конечных сумм $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ — представить каждое слагаемое в виде разности таким образом, чтобы в результате почти всё сократилось.

6. Заметив, что $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, вычислите

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2014\cdot 2015}.$$

$\boxed{\frac{2014}{2015}}$

7. Упростите выражение $k^2-(k-1)^2$, после чего докажите, что:

а) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$; б) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

8. Докажите, что

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}\,.$$

9. Докажите, что

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

10. Докажите, что

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

11. Докажите, что

$$\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=\frac{n(2n+3)}{n+1}\,.$$

12. Докажите, что

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}\,.$$

13. Упростите выражение $k^3-(k-1)^3$, после чего докажите, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 7*) На сколько сумма $2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2$ больше суммы $1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2$?

На 5050

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8.6*) а) Представьте число 2013 в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

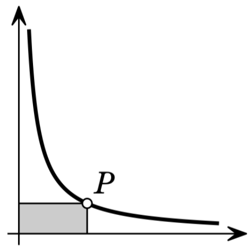
б) Выясните, какое наибольшее количество слагаемых может содержать такая сумма (при условии, что слагаемые — последовательные натуральные числа).

б) 61

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9*) Сравните числа $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2012}{2013!}$ и 1.

Первое число меньше

17. (*ММО, 2020, 8.2*) На графике функции $y = \frac{1}{x}$ Миша отмечал подряд все точки с абсциссами 1, 2, 3, …, пока не устал. Потом пришла Маша и закрасила все прямоугольники, одна из вершин которых — это отмеченная точка, еще одна — начало координат, а еще две лежат на осях. Затем учительница попросила ребят посчитать площадь фигуры, состоящей из всех точек, закрашенных ровно один раз. Сколько получилось?



1

18. (*«Высшая проба», 2019, 8.2, 9.1*) Вычислите сумму

$$1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2 + 10^2 - \ldots + 2017^2 + 2018^2.$$

4074341

19. (*«Ломоносов», 2019, 9.7*) Какое из чисел больше: $\frac{1}{99}$ или

$$\frac{1}{9903} + \frac{1}{9903+200} + \frac{1}{9903+200+202} + \ldots + \frac{1}{9903+200+202+\ldots+2018}?$$

Первое

20. (*«Ломоносов», 2019, 10–11.5*) Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_1 = 1{,}5$ и $a_n = \frac{1}{n^2-1}$ при $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Существуют ли такие значения n, что сумма первых n членов этой последовательности отличается от 2,25 меньше, чем на 0,01? Если да, то найдите наименьшее из них.

Да, $n = 100$

21. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Укажите целое число, ближайшее к числу

$$\sqrt{5000 - \sqrt{5001 \cdot 4999}} + \sqrt{4998 - \sqrt{4999 \cdot 4997}} + \ldots + \sqrt{2 - \sqrt{3 \cdot 1}}.$$

49

22. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Вычислите:

$$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 2013 \cdot 2014}{(1 + 2 + 3 + \ldots + 2013) \cdot \frac{1}{6}}.$$

8060

23. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Вычислите сумму

$$S = \frac{2014}{3 \cdot 7} + \frac{2014}{7 \cdot 11} + \frac{2014}{11 \cdot 15} + \ldots + \frac{2014}{2011 \cdot 2015}.$$

В ответе укажите остаток от деления на 5 натурального числа, ближайшего к полученному значению S.

3

24. (*«Курчатов», 2017, 11.5*) Пусть d_1, d_2, $\ldots$, d_n — это все натуральные делители числа $10!$. Найдите сумму
$$\frac{1}{d_1+\sqrt{10!}}+\frac{1}{d_2+\sqrt{10!}}+\ldots+\frac{1}{d_n+\sqrt{10!}}\,.$$

$\boxed{\frac{3}{16\sqrt{7}}}$