Векторы в стереометрии

Содержание

Стереометрия начинается с шести стандартных типов задач о взаимном расположении прямых и плоскостей:

1. Нахождение угла между скрещивающимися прямыми.
2. Нахождение угла между прямой и плоскостью.
3. Нахождение угла между плоскостями.
4. Нахождение расстояния от точки до прямой.
5. Нахождение расстояния от точки до плоскости.
6. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.

Любая такая задача может быть решена в рамках классической геометрии, однако «классическое» решение не всегда является наиболее коротким и простым. В ряде случаев отлично работают методы аналитической геометрии, основанные на введении системы координат и использовании векторов. Цель данного пособия — продемонстрировать эти методы на примере относительно простых задач (уровня ЕГЭ). Задачами же олимпиадного уровня мы займёмся на занятиях.

Что нужно предварительно знать/прочесть/сделать?

- Необходимо знать базовую теорию по векторам: линейные операции (сложение векторов и умножение вектора на число), проекция вектора на ось (на направление другого вектора), скалярное произведение векторов, выражение линейных операций и скалярного произведения в координатах. Всё это можно посмотреть, например, в пособии «Векторы в физике» (если физическая часть не интересует, её можно пропускать без ущерба для понимания математической части).

- Для лучшего понимания скалярного произведения неплохо было бы сделать задачи 1 — 6 листка «Векторы и механика».

- Ниже мы активно используем операцию векторного произведения. Если вы знаете, что это такое, и помните, как векторное произведение выражается в координатах, то и слава богу. Если нет, то делаем так.

  а) Идём во второй раздел «Векторное произведение» листка «Векторы и механика», вникаем в определение векторного произведения и делаем задачи 10, 11.

б) Смотрим на формулу (1), которая выражает дистрибутивность векторного произведения. Не доказывая эту формулу и просто веря в неё, делаем с её помощью самое главное — задачу 18. Данные формулы, выражающие координаты векторного произведения через координаты сомножителей, надо знать назубок. Запоминаются они легко — просто обратите внимание на циклическую перестановку индексов x, y, z.

в) В принципе, сделанного уже достаточно для наших целей, но если вам интересно, откуда же взялать ключевая формула (1), то разберитесь с определением смешанного произведения и сделайте задачи 14 — 18. Через год, в осеннем семестре на первом курсе, вы увидите, что не зря когда-то потратили время на эти вещи.

Дополнительные замечания

- Ниже используются следующие обозначения. Если, например, написано $A = (1, 2, 3)$, то это означает, что точка A имеет координаты $(1, 2, 3)$. Аналогично, запись $\vec{a} = (1, 2, 3)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(1, 2, 3)$.

- Рисунки к разбираемым задачам делайте, пожалуйста, самостоятельно. Тем самым вы глубже задумаетесь о происходящем и лучше во всём разберётесь.

- В приводимых ниже решениях главной целью является идейная сторона вопроса — демонстрация работы методов аналитической геометрии. Эти решения никоим образом не могут служить эталоном оформления решений, например, на ЕГЭ.

1 Угол между прямыми

Типичная ситуация такова: известны координаты точек A, B, C, D, и нужно найти угол φ между прямыми AB и CD. Действуем следующим образом.

- Находим координаты векторов $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Напомним, что координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по формуле «конец минус начало»: если $A = (a_x, a_y, a_z)$ и $B = (b_x, b_y, b_z)$, то $\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$.

- Вычисляем скалярное произведение $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

- Находим модули $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ и $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

- По определению скалярного произведения имеем $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$, где α — угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Угол α либо совпадает с искомым φ (если скалярное произведение $\vec{u} \cdot \vec{v}$ оказалось неотрицательным), либо является смежным с φ (если $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, то есть угол α тупой). Итак $\varphi = \alpha$ или $\varphi = \pi - \alpha$; в любом случае

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Посмотрим на конкретном примере, как работает эта техника.

Задача. (*ЕГЭ, 2012*) На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

Решение. Пусть вершины A, B, C, D идут на вашем рисунке против часовой стрелки. Начало координат расположим в точке A, ось x пойдёт вдоль AB, ось y — вдоль AD, ось z — вдоль AA_1.

Длина ребра куба не влияет на величину искомого угла, поэтому положим ребро равным 3. Реализуем описанную выше схему.

- $A = (0,0,0)$, $C_1 = (3,3,3)$, $\overrightarrow{AC_1} = (3,3,3)$, и потому можно взять $\vec{u} = (1,1,1)$. Сразу находим $|\vec{u}| = \sqrt{3}$.
- $B = (3,0,0)$, $E = (3,3,1)$, $\overrightarrow{BE} = (0,3,1) = \vec{v}$. Имеем $|\vec{v}| = \sqrt{10}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 4$.
- Окончательно находим
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{30}},$$
так что $\varphi = \arccos \frac{4}{\sqrt{30}}$.

Решаем самостоятельно

1. (*ЕГЭ, 2012*) Точка E — середина ребра DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми CE и AC_1.

$\boxed{\arccos \frac{1}{\sqrt{15}}}$

2. (*ЕГЭ, 2011*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямыми AC и BC_1.

$\boxed{\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}}$

3. (*Пробник, 2012*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$ и точка E — середина ребра AB. Найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1E.

$\boxed{\arccos \frac{1}{\sqrt{50}}}$

2 Угол между прямой и плоскостью

Напомним, что *направляющим вектором прямой* называется любой вектор, лежащий на данной прямой (или параллельный ей). Если прямая задана парой точек A и B, координаты которых известны, то в качестве направляющего вектора $\vec{\ell}$ данной прямой берём $\overrightarrow{AB}$ или коллинеарный ему вектор с более удобными координатами (если, например, оказалось, что $\overrightarrow{AB} = (2,4,6)$, то естественно взять $\vec{\ell} = (1,2,3)$). Ясно, что прямая однозначно задаётся точкой, через которую она проходит, и своим направляющим вектором.

Направляющие векторы плоскости — это любая пара неколлинеарных векторов, лежащих в данной плоскости (или параллельных ей). Ясно, что плоскость однозначно задаётся точкой, через которую она проходит, и парой своих направляющих векторов.

По определению, угол между прямой и плоскостью — это угол α между прямой и её проекцией на эту плоскость. Часто бывает удобно вместо угла α искать угол φ между прямой и нормалью к плоскости (ясно, что это решает задачу, поскольку $\alpha + \varphi = 90°$). Тем самым задача сводится к нахождению угла между направляющим вектором $\vec{\ell}$ данной прямой и нормальным вектором $\vec{n}$ данной плоскости. В результате имеем
$$\sin\alpha = \cos\varphi = \frac{|\vec{\ell} \cdot \vec{n}|}{|\vec{\ell}||\vec{n}|}.$$
Модуль в числителе поставлен на случай, если вдруг окажется $\vec{\ell} \cdot \vec{n} < 0$; тогда острый угол φ будет смежным с тупым углом между векторами $\vec{\ell}$ и $\vec{n}$.

Если плоскость задана тремя точками A, B, C, координаты которых известны, то для нахождения нормального вектора $\vec{n}$ действуем следующим образом: находим направляющие векторы $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, а затем в качестве $\vec{n}$ берём векторное произведение $\vec{u} \times \vec{v}$ или коллинеарный ему вектор с более удобными координатами.

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью BMD.

Решение. Расположение вершин и координатных осей такое же, как и в предыдущей разобранной задаче. Ребро куба полагаем равным 2. Тогда $A_1 = (0, 0, 2)$, $C = (2, 2, 0)$, откуда $\overrightarrow{A_1C} = (2, 2, -2)$. Направляющий вектор прямой A_1C можно взять «в два раза меньше», а именно $\vec{\ell} = (1, 1, -1)$.

Теперь перейдём к плоскости BMD. Имеем: $B = (2, 0, 0)$, $D = (0, 2, 0)$, $M = (2, 1, 2)$, откуда $\overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$ и $\overrightarrow{BM} = (0, 1, 2)$. Это два направляющих вектора плоскости BDM, а нормальный вектор мы найдём, вычислив их векторное произведение[1]

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BM} = (4, 4, -2).$$

Нормальный вектор удобно взять вдвое короче: $\vec{n} = (2, 2, -1)$. К этому же результату мы пришли бы, если бы сначала укоротили вдвое вектор $\overrightarrow{BD}$.

Остаётся закончить задачу: $\vec{\ell} \cdot \vec{n} = 5$, $|\vec{\ell}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}| = 3$,

$$\sin\alpha = \cos\varphi = \frac{|\vec{\ell} \cdot \vec{n}|}{|\vec{\ell}||\vec{n}|} = \frac{5}{3\sqrt{3}},$$

то есть $\alpha = \arcsin\frac{5}{3\sqrt{3}}$.

Замечание. Если есть сомнения, стоит ли в работе писать про векторное произведение, то можно сделать так. На черновике находим $\vec{n} = (2, 2, -1)$ с помощью векторного произведения, а на чистовике пишем что-нибудь вроде:

> *Легко видеть, что вектор $\vec{n} = (2, 2, -1)$ является нормальным вектором плоскости BDM, поскольку он перпендикулярен обоим векторам $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BM}$. В самом деле,*
>
> $$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = 0,$$
> $$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0.$$

То есть вы предъявляете вектор $\vec{n}$ и показываете, что он и впрямь нормальный. А откуда предъявленный пример взялся, вы объяснять не обязаны.

Решаем самостоятельно

4. (*Пробник, 2009*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

$\boxed{\arcsin\frac{24}{85}}$

[1] Напомним, что если $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, то

$$c_x = a_yb_z - a_zb_y, \quad c_y = a_zb_x - a_xb_z, \quad c_z = a_xb_y - a_yb_x.$$

5. (*ЕГЭ, 2011*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

$\boxed{\arcsin \frac{3\sqrt{2}}{10}}$

3 Угол между плоскостями

По определению, углом между двумя плоскостями называется линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями. Нетрудно видеть, что линейный угол двугранного угла равен углу между нормалями к плоскостям (поскольку нетупые углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны). Тем самым задача о нахождении угла φ между плоскостями сводится к нахождению угла между их нормальными векторами $\vec{n}$ и $\vec{m}$, так что имеем

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}.$$

Как и выше, модуль в числителе поставлен на случай тупого угла между векторами $\vec{n}$ и $\vec{m}$.

Задача. (*ЕГЭ, 2012*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение. Расположение вершин и координатных осей по-прежнему то же, что и выше. Имеем: $B = (2,0,0)$, $E = (0,0,3)$, $D_1 = (0,2,5)$. Находим направляющие векторы плоскости BED_1: $\overrightarrow{BE} = (-2,0,3)$ и $\overrightarrow{BD_1} = (-2,2,5)$ и их векторное произведение:

$$\overrightarrow{BE} \times \overrightarrow{BD_1} = (-6,4,-4).$$

В качестве нормального вектора плоскости BED_1 берём коллинеарный вектор $\vec{n} = (3,-2,2)$.

С нормальным вектором плоскости ABC всё ясно: $\vec{m} = (0,0,1)$. Заканчиваем задачу:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{17}}.$$

Отсюда $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{17}}$. Убедитесь, что это совпадает с официальным ответом $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$ (он получен из геометрического решения, в котором удобнее искать именно тангенс угла).

Решаем самостоятельно

6. (*ЕГЭ, 2010*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 6$. Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

$\boxed{\arccos \frac{9}{41}}$

7. (*ЕГЭ, 2010*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

$\boxed{\operatorname{arctg} \frac{24}{25}}$

8. (*ЕГЭ, 2010*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями AB_1C и DCC_1.

$\boxed{\sqrt{2}}$

9. (*Репетиционный ЕГЭ, 2012*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

$\boxed{45^\circ}$

4 Расстояние от точки до прямой

Типичная ситуация такова: известны координаты точек A, B, C, и нужно найти расстояние от точки A до прямой BC.

В принципе задача легко решается и без векторов: в треугольнике ABC мы знаем длины всех сторон, и остаётся найти высоту AH. Единственная неприятность заключается в вычислениях, поскольку стороны треугольника могут оказаться иррациональными. Векторный же подход даёт более простое в вычислительном плане решение.

Обозначмм $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\varphi = \angle ACB$. Тогда $a_b = |\vec{a}|\cos\varphi$ — проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$. Имеем:

$$a_b = |\vec{a}|\cos\varphi = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Проекция a_b по модулю равна длине отрезка CH. Искомое расстояние находим по теореме Пифагора:

$$\rho(A, BC) = AH = \sqrt{CA^2 - CH^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_b^2}.$$

Задача. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Точки M и N — середины рёбер AB и CC_1 соответственно. Найдите расстояние от точки A до прямой MN.

Решение. Расположение вершин и координатных осей то же, что и выше. $M = (1, 0, 0)$, $N = (2, 2, 1)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AM} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = \overrightarrow{MN} = (1, 2, 1)$,

$$a_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

И тогда

$$\rho(A, MN) = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_b^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Решаем самостоятельно

10. (*Пробник, 2010*) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

11. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $AA_1 = 2\sqrt{3}$. Точки E и F служат серединами рёбер AB и BC соответственно. Найдите расстояние от точки D_1 до прямой EF.

$\boxed{\frac{2\sqrt{399}}{5}}$

12. (*Пробник, 2010*) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{95}}{10}}$

5 Расстояние от точки до плоскости

Типичная ситуация такова: даны точки A, B, C, M с известными координатами, и нужно найти расстояние от точки M до плоскости ABC.

Идея решения следующая: искомое расстояние равно модулю проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$ на направление нормального вектора $\vec{n}$ к плоскости ABC:

$$\rho(M, ABC) = |a_n| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}\,.$$

Разумеется, вместо вектора $\overrightarrow{MA}$ можно взять $\overrightarrow{MB}$ или $\overrightarrow{MC}$ (у какой из точек побольше нулей в координатах)[2].

Задача. (*ЕГЭ, 2012*) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

Решение. Отметим сразу, что геометрическое решение данной задачи не лежит на поверхности, но если его разглядеть, то задача решается буквально в одну строчку! Попробуйте его найти. Ну а мы, естественно, изложим векторное решение.

Пусть на вашем рисунке точки A, B, C идут против часовой стрелки. Начало координат помещаем в точку C, ось x — вдоль CA, ось z — вдоль CC_1, ось y дополняет систему координат до правой. Имеем: $A = (2, 0, 0)$, $D = \left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$, $B = \left(1, \sqrt{3}, 0\right)$, $B_1 = \left(1, \sqrt{3}, 3\right)$. Направляющие векторы плоскости ADB_1:

$$\overrightarrow{AD} = \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), \quad \overrightarrow{AB_1} = \left(-1, \sqrt{3}, 3\right).$$

Их векторное произведение:

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB_1} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, -2\sqrt{3}\right).$$

Умножим его на $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ и получим нормальный вектор $\vec{n}$ несколько попроще:

$$\vec{n} = \left(3, -3\sqrt{3}, 4\right).$$

Теперь берём вектор $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (2, 0, 0)$ и получаем:

$$\rho(C, ADB_1) = |a_n| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\,.$$

[2] Широко известный подход к решению задачи о нахождении расстояния от точки M до плоскости ABC состоит в том, чтобы по координатам точек A, B, C написать уравнение плоскости ABC в виде $ax+by+cz+d = 0$, а затем воспользоваться формулой расстояния от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости:

$$\rho(M, ABC) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

Вникнув в описываемую нами идею, вы легко поймёте, что на самом деле не нужно ни искать уравнение плоскости, ни помнить данную формулу — которая, заметим, на основе этой идеи как раз-таки и выводится :-)

Решаем самостоятельно

13. (*Пробник, 2011*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна 1. M — середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

14. (*Пробник, 2011*) Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, у которого $AB = 10$, $BD = 12$. Высота призмы равна 6. Найдите расстояние от центра грани $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости BDC_1.

$\boxed{\frac{24}{5}}$

15. (*Пробник, 2011*) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $2\sqrt{10}$; высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM, где M — середина ребра A_1C_1.

$\boxed{2}$

16. (*Пробник, 2011*) Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

17. (*Пробник, 2011*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT, где T — середина ребра AD.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}$

18. (*Пробник, 2010*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

6 Расстояние между прямыми

Типичная ситуация такова: даны точки A, B, C, D с известными координатами, и нужно найти расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD.

Идея решения следующая. Через прямую CD проходит единственная плоскость π, параллельная прямой AB; искомое расстояние между AB и CD равно расстоянию от (любой точки) прямой AB до плоскости π. Решать задачу о нахождении расстояния от точки до плоскости мы уже умеем, нам нужен только нормальный вектор плоскости π. Но его нам даст векторное произведение $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$.

Задача. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 3. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение. Снова точки A, B, C, D идут против часовой стрелки, начало координат — в точке A, ось x — вдоль AB, ось y — вдоль AD, ось z — вдоль AA_1. Находим направляющие векторы наших прямых: $\overrightarrow{AB_1} = (2, 0, 3)$ и $\overrightarrow{BC_1} = (0, 2, 3)$, и затем направляющий вектор их общего перпендикуляра:

$$\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{BC_1} = (-6, -6, 4).$$

Удобнее, конечно, поделить это на -2 и взять вектор $\vec{n} = (3, 3, -2)$.

Будучи направляющим вектором общего перпендикуляра к прямым AB_1 и BC_1, вектор $\vec{n}$ является нормальным вектором плоскости π, проходящей через BC_1 параллельно AB_1. Искомое расстояние равно расстоянию от прямой AB_1 до плоскости π, то есть расстоянию от точки A до π, ну а последнее, как мы знаем, равно модулю проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (2, 0, 0)$ на направление вектора $\vec{n}$. Окончательно имеем:

$$\rho(AB_1, BC_1) = \rho(A, \pi) = |a_n| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{22}}.$$

Решаем самостоятельно

В нижеследующих задачах смотрите сами, как лучше решать — аналитически или классически.

19. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб $ABCD$ с углом при вершине A, равным $30°$. Все рёбра призмы равны 2. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

$\boxed{1}$

20. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 3. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{10}}{3}}$

21. (*ЕГЭ, 2017*) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, а боковая грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 1$, $BC = 4$.

$\boxed{\text{б) } \frac{2}{3}}$

22. (*ЕГЭ, 2016*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB соответственно, а NT — высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой отрезка SM.

б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC.

$\boxed{\text{б) } \frac{\sqrt{15}}{5}}$

23. (*Пробник, 2013*) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

$\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

24. (*Юг, пробный ЕГЭ, 2012*) В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = DB = DC = 13$ см, $DA = 6$ см, $BC = 24$ см. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

$\boxed{4 \text{ см}}$

25. (*ЕГЭ, 2011*) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

26. (*Пробник, 2011*) Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, где L — середина ребра MC, O — центр грани ABC.

$\boxed{\frac{\sqrt{7}}{14}}$