Стереометрия на олимпиаде «Покори Воробьёвы горы!»

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015.2*) Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 1, проведена плоскость. Найдите объём меньшей части цилиндра, отсекаемой этой плоскостью, если угол между осью цилиндра и плоскостью равен 60°.

$\boxed{3\pi}$

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012.2*) В желобе, имеющем форму двугранного угла величины $2\arcsin\frac{1}{3}$, неподвижно лежит шар радиуса 3, касаясь при этом обеих граней. Другой шар скользит вдоль желоба, также постоянно касаясь каждой из граней, и проскальзывает мимо неподвижно лежащего шара, не сталкиваясь с ним и даже не касаясь его. Найдите все возможные значения радиуса скользящего шара.

$\boxed{(0; \frac{3}{2}) \cup (6; +\infty)}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019.3*) Две смежные боковые грани пирамиды, в основании которой лежит квадрат, перпендикулярны плоскости основания. Двугранный угол между двумя другими боковыми гранями равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите отношение высоты пирамиды к стороне основания.

$\boxed{1}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017.3*) В треугольной пирамиде длины перпендикуляров, опущенных из четырёх вершин на противоположные грани, равны 3, 4, 7 и 84/37 соответственно. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.

$\boxed{\frac{6}{7}}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011.3*) В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объём которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

$\boxed{24}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019.4*) В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 3\sqrt{2}$ и $AC = 2\sqrt{6}$. Высота пирамиды равна $\sqrt{6}$ и видна из вершин A и C под одним и тем же углом, равным $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Под каким углом она видна из вершины B?

$\boxed{\frac{\pi}{8} \text{ или } \frac{3\pi}{8}}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016.4*) На плоскости основания конуса с высотой, равной радиусу основания, дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние, равное двум радиусам основания. Найдите угол между касательными плоскостями к боковой поверхности конуса, проходящими через данную точку.

$\boxed{2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}}$

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016.4*) Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\operatorname{arctg} 3$. В каком отношении делит боковую сторону SB сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

$\boxed{5:8}$

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015.4*) Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, и делит биссектрису SD грани SAB и медиану SE грани SAC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды, если $SK : KA = SA : SB = 2$?

$\boxed{\frac{116}{19}}$

10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014.4*) В треугольной пирамиде $SABC$ рёбра SA, SB и SC не длиннее, чем 3, 4 и 5 соответственно, а площади граней SAB, SAC и SBC не меньше, чем 6, 15/2 и 10 соответственно. Найдите объём пирамиды $SABC$.

$\boxed{10}$

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012.4*) Найдите максимально возможное отношение объёма конуса к объёму шара, содержащего этот конус.

$\boxed{\frac{8}{27}}$

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018.5*) Развёртка боковой поверхности усечённого конуса с образующей, равной 12, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиусы оснований этого усечённого конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

$\boxed{10+2\sqrt{35} \text{ и } 14+2\sqrt{35}}$

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017.5*) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1$-$C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$, а боковая сторона $AA_1 = 2$.

а) Докажите, что в призму можно вписать шар, и найдите его радиус.

б) Найдите объём наименьшей части шара, которую отсекает плоскость, проходящая через точки B, A_1 и E.

$\boxed{\text{б) } \frac{10\sqrt{5}-14}{15\sqrt{5}}\pi}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016.5*) Боковые рёбра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

$\boxed{27}$

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014.5*) Одно основание правильной n-угольной призмы ($n \geqslant 3$) имеет n общих точек со сферой радиуса 3; другое основание имеет с этой сферой одну общую точку. Какие значения может принимать объём призмы?

$\boxed{0 < V \leqslant 16n \sin\frac{2\pi}{n} \text{ при фиксированном } n;\ 0 < V < 32\pi \text{ при произвольном } n}$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014.5*) На основании прямого кругового конуса расположны три попарно касающихся друг друга шара одинакового радиуса. Каждый из них касается также боковой поверхности конуса. Четвёртый шар того же радиуса касается первых трёх и боковой поверхности конуса. Найдите объём конуса, если радиус окружности, образованной точками касания четвёртым шаром боковой поверхности конуса, равен $\sqrt{2}$.

$\boxed{\frac{\pi}{6}\left(3+\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^3}$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014.5*) В правильном тетраэдре $ABCD$ проведено сечение так, что оно проходит через точки K, L, M, лежащие на рёбрах DC, DB, DA соответственно. При этом $DK : KC = 1 : 3$, $DL : LB = 2 : 1$, $DM : MA = 1 : 1$. Найдите угол между плоскостями грани ABC и построенного сечения.

$\boxed{\arccos\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{131}}}$

18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013.5*) Пять рёбер тетраэдра имеют длины 2, 4, 5, 9 и 13. Определите, может ли при этом длина шестого ребра:

а) равняться 11;

б) равняться 11,1.

$\boxed{\text{а) Нет; б) нет}}$

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013.5*) Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны по 90°. Найдите угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

$\boxed{2\arccos\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013.5*) Гора имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S, причём длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β ($\cos\beta = 0{,}6$). Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъёме или спуске под углом α к горизонту равна $4\cos^2\alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A, успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов 15 минут из точки C, если в середине пути он обязательно делает 9-минутную остановку?

$\boxed{\text{Может}}$

21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012.5*) Высота правильной треугольной пирамиды, проведённая из вершины основания к противоположной боковой грани, равна 4. Какие значения может принимать площадь полной поверхности такой пирамиды?

$\boxed{\left[\frac{64}{\sqrt{3}};+\infty\right)}$

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012.5*) Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, равен R. Найдите величину двугранного угла при боковом ребре этой пирамиды, при которой максимален объём другой пирамиды, вершинами которой служат центр вписанной в исходную пирамиду сферы и точки касания этой сферы с боковыми гранями исходной пирамиды.

$\boxed{90^\circ}$

23. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011.5*) Рассматриваются плоские сечения правильной пирамиды $SABCD$, параллельные боковому ребру SB и диагонали основания AC, в которые можно вписать окружность. Какие значения может принимать радиус этих окружностей, если $AC = 1$, $\cos\angle SBD = \frac{2}{3}$?

$\boxed{(0; \frac{1}{6}] \cup \{\frac{1}{3}\}}$

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010.5*) Через точки L, M, N, лежащие соответственно на рёбрах AB, AC, AD правильного тетраэдра $ABCD$, проведена плоскость. Известно, что рёбра тетраэдра равны 1, объём пирамиды $ALMN$ равен $\sqrt{2}/48$ и $AL = 1/3$. Какие значения может принимать длина отрезка MN?

$\boxed{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{13}}{4}\right]}$

25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010.6*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$ длины всех рёбер равны 1. Некоторая плоскость пересекает отрезки SA, SB, SC, SD в точках K, L, M, N соответственно. Какие значения может принимать площадь треугольника SLN, если $SK = \frac{1}{2}$ и $SM = \frac{1}{3}$?

$\boxed{\left[\frac{2}{25}; \frac{1}{8}\right]}$

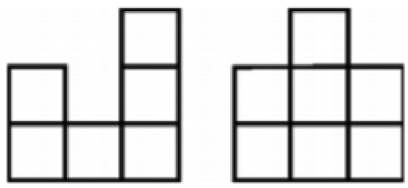
26. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010.6*) Через точки M, N, K, L, лежащие соответственно на рёбрах SA, SB, SC, SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), проведена плоскость. Известно, что $MK \perp NL$, $SN = 3 \cdot SL$ и площадь треугольника SMK равна 12. Найдите площадь треугольника SLN.

$\boxed{16}$

27. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовем точку *эквидистантной*, если найдутся две вершины куба, для которых эта точка является серединой отрезка. Сколько эквидистантных точек в кубе?

$\boxed{19}$

28. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9*) На уроке рисования учитель сложил из нескольких одинаковых кубиков фигуру, а Петров и Васечкин нарисовали её с двух различных точек зрения (см. рисунок). Из скольких кубиков могла состоять эта фигура? (В ответе укажите произведение наибольшего и наименьшего возможного значения.)



$\boxed{128}$