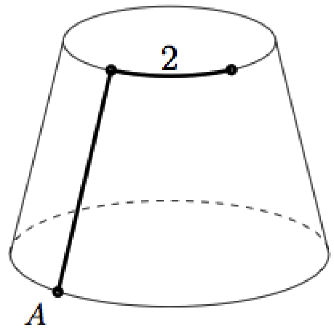
# Стереометрия на ОММО

Задачи по стереометрии на ОММО требуют, как правило, хорошего пространственного воображения. Вычисления в них обычно минимальны.

**1.** (*ОММО, 2020.8*) Про тетраэдр $PQRS$ известно, что $PQ = 4$, $SR = 6$, $\angle QRS = \angle PSR = 50°$, $\angle QSR = \angle PRS = 40°$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек $P$, $Q$, $R$, $S$ не меньше $6\pi$. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

$\boxed{18\pi}$

**2.** (*ОММО, 2019.10*) Назовём *горой* усечённый прямой круговой конус с длиной окружности нижнего основания 8, а верхнего основания — 6. Склон горы наклонён под углом 60° к плоскости основания. На окружности нижнего основания лежит точка $A$. Турист начинает подъём по склону из точки $A$ к ближайшей точке верхнего основания, а затем продолжает свой путь по краю верхнего основания, и проходит расстояние 2. После этого он возвращается в точку $A$ кратчайшим маршрутом. Чему равна длина обратного пути?




$\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{\pi}}$

**3.** (*ОММО, 2018.10*) Точки $M$, $N$ и $K$ расположены на боковых рёбрах $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 2$, $BN : BB_1 = 1 : 3$, $CK : CC_1 = 1 : 4$. Точка $P$ принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объёма пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 16.

$\boxed{4}$

**4.** (*ОММО, 2017.10*) В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием $ABC$ боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

$\boxed{\frac{10\sqrt{6}}{9}}$

**5.** (*ОММО, 2016.10*) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $a$, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами в вершинах основания этой пирамиды.

$\boxed{\frac{81-4\pi}{486}a^3}$

**6.** (*ОММО, 2015.10*) В конус вписан цилиндр объёма 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объёмом 91. Найдите объём исходного конуса.

$\boxed{94{,}5}$

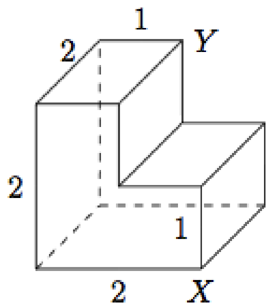
**7.** (*ОММО, 2014.10*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения — плоскостью, проходящей через диагональ $A_1C$, и плоскостью, проходящей через диагональ $B_1D$. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

194

**8.** (*ОММО, 2013.10*) Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повёрнут на $90^\circ$ вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер $AD$ и $B_1C_1$. Найдите объём общей части исходного куба и повёрнутого.

$\sqrt{2} - \frac{2}{3}$

**9.** (*ОММО, 2011.9*) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины $X$ до вершины $Y$ имеет длину 4. Прав ли он?




Нет

**10.** (*ОММО, 2010.9*) Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой — в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз?

Ущерб первого в 4,5 раза больше

**11.** (*ОММО, 2009.9*) Тетраэдр с ребром 1 повернули на $90^\circ$ относительно прямой, соединяющей середины противоположных рёбер. Найдите объём общей части нового и исходного тетраэдров.

$\frac{\sqrt{2}}{24}$