

Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Среднее арифметическое нескольких чисел — это сумма данных чисел, делённая на их количество. Так, например:

- среднее арифметическое чисел a и b равно $\frac{a+b}{2}$;
- среднее арифметическое чисел a , b и c равно $\frac{a+b+c}{3}$;
- среднее арифметическое чисел a , b , c и d равно $\frac{a+b+c+d}{4}$.

Вообще,

- среднее арифметическое чисел a_1, a_2, \dots, a_n равно $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Среднее арифметическое можно вычислять для чисел любого знака. Однако далее, если нет специальных оговорок, мы считаем все рассматриваемые числа неотрицательными. (Дело в том, что сейчас появятся корни, и у нас не будет желания то и дело отвлекаться, следя за знаком подкоренного выражения.)

Что такое **среднее геометрическое**? Начинаем:

- среднее геометрическое чисел a и b равно \sqrt{ab} ;
- среднее геометрическое чисел a , b и c равно $\sqrt[3]{abc}$;
- среднее геометрическое чисел a , b , c и d равно $\sqrt[4]{abcd}$.

Вообще,

- среднее геометрическое чисел a_1, a_2, \dots, a_n равно $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Неравенство Коши

Оказывается, среднее арифметическое нескольких неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad (1)$$

причём равенство в (1) достигается лишь в случае $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Неравенство (1) называется *неравенством Коши*.

Мы докажем неравенство Коши для случаев $n = 2, 3, 4$.

Для двух чисел неравенство Коши имеет вид:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (2)$$

Для доказательства составим разность и преобразуем:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}.$$

Очевидно, что

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0,$$

причём равенство достигается лишь при $a = b$. Тем самым неравенство (2) доказано.

Из неравенства (2) следует ещё одно важное неравенство. Пусть $a > 0$. Перепишем неравенство (2) в виде

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

и положим тут $b = \frac{1}{a}$. Получим:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \quad (3)$$

Мы видим, таким образом, что *сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше двойки, причём равенство достигается, когда оба они равны единице.*

Теперь докажем неравенство Коши для четырёх чисел. Оно имеет вид:

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}. \quad (4)$$

Используем уже доказанное неравенство (2):

$$\frac{a + b + c + d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Неравенство (4) тем самым доказано. Равенство имеет место при $a = b$, $c = d$ и $ab = cd$, то есть при $a = b = c = d$.

Неравенство Коши для трёх чисел имеет вид:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \quad (5)$$

Для доказательства положим $d = \sqrt[3]{abc}$ в неравенстве (4):

$$\frac{a + b + c + \sqrt[3]{abc}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[4]{(abc)^{\frac{4}{3}}} = (abc)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{abc},$$

откуда

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc},$$

что и доказывает неравенство (5). Равенство в нём достигается при $a = b = c$.

Нахождение экстремумов

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим может применяться при решении задач на нахождение экстремумов, то есть наибольших и наименьших значений некоторых функций.

ЗАДАЧА 1. Число 10 разбить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

РЕШЕНИЕ. Пусть $10 = x + y$. Очевидно, что оба слагаемых x и y должны быть положительными. В силу неравенства (2) имеем:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

то есть $xy \leq 25$. Наибольшее значение произведения xy , равное 25, достигается при $x = y = 5$.

ОТВЕТ: $10 = 5 + 5$.

ЗАДАЧА 2. Решить уравнение:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 1 + 2x - x^2.$$

РЕШЕНИЕ. «Страшноватый» вид уравнения говорит о том, что здесь должны применяться какие-то нестандартные методы. И действительно, можно использовать неравенство (3).

Перепишем уравнение в виде:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 2 - (x - 1)^2.$$

Оценим левую часть (ЛЧ) и правую часть (ПЧ) этого уравнения. В силу неравенства (3) имеем $ЛЧ \geq 2$. В то же время ясно, что $ПЧ \leq 2$. Равенство может иметь место лишь в том случае, когда $ЛЧ = 2$ и $ПЧ = 2$ *одновременно*. Так будет при $x = 1$, и только.

ОТВЕТ: 1.

ЗАДАЧА 3. Найти наименьшее значение функции $y = x + \frac{32}{x^2}$ при $x > 0$.

РЕШЕНИЕ. Задача легко решается с помощью следующего трюка:

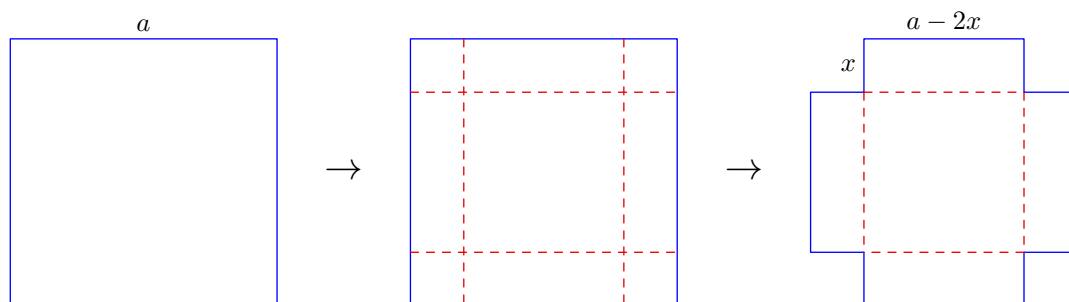
$$y = x + \frac{32}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{32}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{32}{x^2}} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

Наименьшее значение $y_{\min} = 6$ достигается при $\frac{x}{2} = \frac{32}{x^2}$, то есть при $x = 4$.

ОТВЕТ: 6.

ЗАДАЧА 4. Из квадратного листа жести со стороной a изготавливается коробка в виде прямоугольного параллелепипеда. Для этого в углах листа вырезаются четыре квадратных куска, и получившаяся фигура складывается по линиям разреза. Найти максимально возможный объём такой коробки.

РЕШЕНИЕ. Поясним процесс изготовления коробки с помощью рисунка:



Сторону вырезаемого квадрата обозначим x . Тогда в основании коробки получается квадрат со стороной $a - 2x$, а высота коробки равна x . Объём коробки:

$$V = x(a - 2x)^2.$$

Теперь нужно исхитриться и грамотно использовать неравенство Коши. Для этого запишем объём следующим образом:

$$V = \frac{1}{4} \cdot 4x(a - 2x)(a - 2x).$$

В результате имеем:

$$\sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{4x(a - 2x)(a - 2x)} \leq \frac{4x + (a - 2x) + (a - 2x)}{3} = \frac{2a}{3},$$

откуда

$$V \leq \frac{2a^3}{27}.$$

Максимальное значение объёма $V_{\max} = \frac{2a^3}{27}$ достигается при $4x = a - 2x$, то есть при $x = a/6$.

ОТВЕТ: $\frac{2a^3}{27}$.

Задачи

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1) Даны три числа a, b, c . Известно, что среднее арифметическое чисел a и b на 5 больше среднего арифметического всех трёх чисел. А среднее арифметическое чисел a и c на 8 меньше среднего арифметического всех трёх чисел. На сколько среднее арифметическое чисел b и c отличается от среднего арифметического всех трёх чисел?

3 вН

2. (Олимпиада Физтех-лицея, 2015, 5–7) Средний возраст одиннадцати футболистов — 28 лет. Во время игры один из игроков был удалён и средний возраст оставшихся игроков стал 27 лет. Сколько лет удалённому игроку?

8Э

3. (Всеросс., 2019, ШЭ, 9.1) Есть три брата-акробата. Их средний рост — 1 метр 74 сантиметра. А средний рост двух из этих братьев: самого высокого и самого низкого — 1 метр 75 сантиметров. Какого роста средний брат? Ответ обоснуйте.

1 метр 72 сантиметра

4. («Ломоносов», 2012, 8.2) В некотором городе два района — старый и новый. Средняя высота зданий в старом районе вдвое меньше средней высоты зданий в новом районе и на 30% меньше, чем средняя высота зданий в городе. Найдите отношение количеств зданий в старом и новом районах.

4 : 3

5. (Всеросс., 2015, МЭ, 8.4) Три пирата вечером поделили добытые за день бриллианты: по двенадцать Биллу и Сэму, а остальные — Джону, который считать не умел. Ночью Билл у Сэма, Сэм у Джона, а Джон у Билла украли по одному бриллианту. В результате средняя масса бриллиантов у Билла уменьшилась на один карат, у Сэма уменьшилась на два карата, зато у Джона увеличилась на четыре карата. Сколько бриллиантов досталось Джону?

6

6. («Курчатов», 2017, 11.1) На доске было выписано несколько чисел, их среднее арифметическое было равно M . К ним дописали число 15, при этом среднее арифметическое выросло до $M+2$. После этого дописали ещё и число 1, и среднее арифметическое уменьшилось до $M+1$. Сколько чисел было на доске изначально? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

4

7. (ОММО, 2012.2) На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе — по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1. Сколько всего ящиков на двух складах?

091

8. («Ломоносов», 2009.1) На сколько одно из положительных чисел больше другого, если их среднее арифметическое равно $3\sqrt{2}$, а среднее геометрическое равно $\sqrt{2}$?

8 вН

9. («Ломоносов», 2018, 9.3) Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{4}{4-y^2}$$

при условиях $|x| < 1$, $|y| < 2$ и $xy = 1$.

7

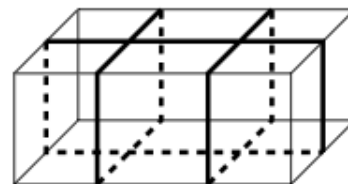
10. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9.7) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x, y) = \frac{2015(x+y)}{\sqrt{2015x^2 + 2015y^2}}$$

и укажите все пары (x, y) , при которых оно достигается.

0 > n = x или 0307^—

11. (ОММО, 2012.10) Посылка должна быть упакована в ящик в форме прямоугольного параллелепипеда и перевязана один раз вдоль и два раза поперек (см. рисунок). Можно ли отправить посылку объема 37 дм^3 , имея 3,6 м веревки (толщиной стенок ящика и уходящей на узлы веревкой пренебречь)?



Нет

12. («Ломоносов», 2007.10) В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда по предложению Вовочки учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Докажите, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное её значение после такой замены:

- а) одной оценки «4»;
- б) всех его оценок «4».

$\frac{11}{8} \text{ } (9; \frac{6}{7} \text{ } (в$