Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Говоря о средней линии, третью сторону треугольника будем называть основанием.

Так, на рис. 1 показана средняя линия KL треугольника ABC. В этом случае мы называем основанием сторону AC.

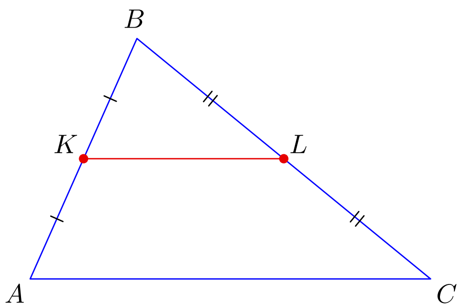

Рис. 1. Средняя линия

Теорема о средней линии. Средняя линия треугольника: 1) параллельна основанию; 2) равна половине основания.

Доказывая теорему о средней линии, мы продемонстрируем один приём, который бывает полезен в задачах. А именно, мы как бы заходим с другой стороны: вместо того, чтобы проводить среднюю линию и доказывать параллельность, мы проводим через середину стороны прямую, параллельную основанию, и показываем, что получится средняя линия.

Доказательство. Пусть K — середина стороны AB треугольника ABC. Проведём KL параллельно основанию AC (рис. 2). Имеем: $\angle BKL = \angle BAC$ (как соответственные углы при параллельных прямых KL и AC).

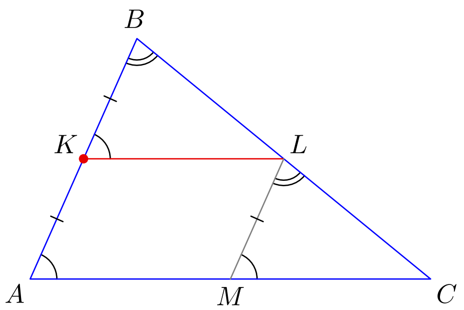

Рис. 2. К теореме о средней линии

Проведём также $LM \parallel AB$. Имеем: $\angle MLC = \angle ABC$ (снова как соответственные углы). Кроме того, четырёхугольник $AKLM$ — параллелограмм по построению. По свойству параллелограмма $LM = AK$ и, стало быть, $LM = KB$.

Таким образом, треугольники KBL и MLC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $BL = LC$ (эти стороны являются соответствующими, так как лежат напротив равных углов), и потому KL — средняя линия. Итак, средняя линия параллельна основанию — первое утверждение теоремы доказано.

Из равенства треугольников KBL и MLC следует также, что $KL = MC$. Вместе с тем, по свойству параллелограмма имеем $KL = AM$. Значит, M — середина AC, и $KL = AC/2$. Тем самым доказано второе утверждение теоремы.

Теорема о средней линии, очень важная сама по себе, позволяет доказать также весьма важную теорему о медианах треугольника.

Теорема о медианах. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$ (считая от вершины треугольника).

Доказательство. Докажем прежде всего, что две медианы делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Пусть медианы AL и CK треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 3). Пусть также M — середина CO и N — середина AO.

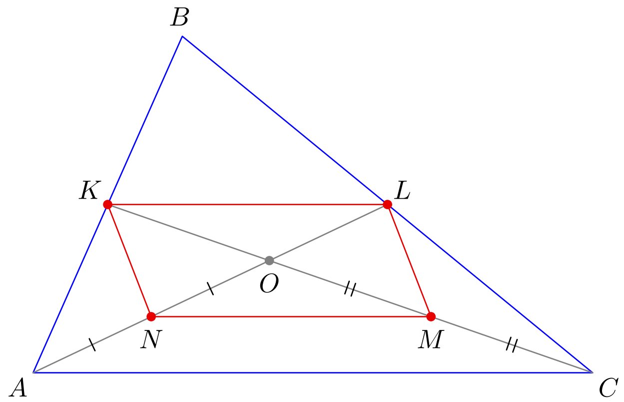

Рис. 3. К теореме о медианах

Отрезок KL есть средняя линия в треугольнике ABC; по теореме о средней линии имеем $KL \parallel AC$ и $KL = AC/2$.

Отрезок NM есть средняя линия в треугольнике AOC, поэтому $NM \parallel AC$ и $NM = AC/2$.

Следовательно, $KL \parallel NM$ и $KL = NM$. Таким образом, в четырёхугольнике $KLMN$ две стороны равны и параллельны, и потому $KLMN$ — параллелограмм. Поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, имеем $KO = OM$ и $LO = ON$. Отсюда следует, что $AO = 2OL$ и $CO = 2OK$, то есть медианы AL и CK делятся точкой O в отношении $2 : 1$, считая от вершин.

Нам остаётся доказать, что третья медиана BP также проходит через точку O. В самом деле, предположим, что медианы BP и AL пересекаются в точке O_1. Тогда, как мы только что доказали, должно быть выполнено равенство $AO_1 : O_1L = 2 : 1$. Но ведь и $AO : OL = 2 : 1$; следовательно, точка O_1 совпадает с O. Теорема доказана.

Задачи

1. Докажите, что три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

2. Дан треугольник с периметром 6. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника.

$\boxed{\varepsilon}$

3. Две стороны треугольника равны a и b. Через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Найдите периметр получившегося четырёхугольника.

$\boxed{a+b}$

4. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

5. В четырёхугольнике сумма длин диагоналей равна 5. Найдите периметр четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данного,

$\boxed{5}$

6. Диагональ прямоугольника равна 1. Найдите периметр четырёхугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника.

$\boxed{2}$

7. Диагонали ромба равны 6 и 10. Найдите стороны и углы четырёхугольника с вершинами в серединах сторон этого ромба.

$\boxed{3,\ 5,\ 3,\ 5;\ \text{все углы равны } 90^\circ}$

8. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна отрезку, соединяющему середины катетов.

9. Докажите, что отрезок, соединяющий середины сторон AB и AC треугольника ABC, и медиана, проведённая из вершины A, делят друг друга пополам.

10. Угол A ромба $ABCD$ равен 45°, проекция стороны AB на сторону AD равна 10. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны.

$\boxed{5}$

11. Расстояние между серединами перпендикулярных хорд AC и BC окружности равно 7. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения этих хорд.

$\boxed{7}$

12. Расстояние от середины хорды BC до диаметра AB равно 1. Угол BAC равен 30°. Найдите хорду AC.

$\boxed{4}$

13. Середины сторон выпуклого пятиугольника последовательно соединены отрезками. Найдите периметр полученного пятиугольника, если сумма всех диагоналей исходного пятиугольника равна a.

$\boxed{a/2}$

14. Две окружности пересекаются в точках A и D. Расстояние между центрами окружностей равно a, центры окружностей лежат по разные стороны от общей хорды. Проведены диаметры AB и AC этих окружностей. Найдите $BD + DC$.

$\boxed{2a}$

15. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причём $BM = 3AM$ и $CN = 3AN$. Докажите, что $MN \parallel BC$ и найдите MN, если $BC = 8$.

$\boxed{2}$

16. Сторона AB треугольника ABC равна 4. Найдите отрезок, соединяющий середины медиан AM и BN.

$\boxed{1}$

17. Дан четырёхугольник, в котором нет параллельных сторон. Докажите, что середины двух противоположных сторон этого четырёхугольника и середины его диагоналей служат вершинами параллелограмма.

18. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, равны. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника перпендикулярны.

19. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, перпендикулярны. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника равны.

20. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, равен 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

$\boxed{1}$

21. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC. Найдите угол, образованный продолжениями сторон AB и CD.

$\boxed{90^\circ}$

22. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AN на биссектрисы внешних углов B и C. Найдите MN, если периметр треугольника ABC равен 24.

$\boxed{12}$

23. Окружность проходит через середины гипотенузы и катета прямоугольного треугольника и касается второго катета. В каком отношении этот катет делится точкой касания?

$\boxed{1:3}$

24. Если две медианы треугольника равны, то он — равнобедренный. Докажите.

25. Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые DM и BN пересекаются на диагонали AC.

26. Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

27. Высоты BH_1 и CH_2 остроугольного треугольника ABC равны 7 и 9, а медиана AM равна 8. Точки P и Q симметричны точке M относительно сторон AC и AB соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $APMQ$.

$\boxed{32}$

28. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что середина отрезка MN лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной основанию AC.

29. Сформулируйте и докажите признак равенства треугольников по трём медианам.

30. Даны треугольник ABC и произвольная точка M. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны точке M относительно середин сторон BC, AC и AB соответственно. Докажите, что:

а) $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$;

б) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

31. В четырёхугольнике $ABCD$ точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что середины отрезков AF, CE, BF и DE являются вершинами параллелограмма.

32. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ втрое больше диагонали BD и пересекается с ней под углом $60°$. Найдите отрезок, соединяющий вершину D с серединой стороны BC, если $AC = 12$ и угол BDC тупой.

$\boxed{3}$

33. Сторона AB треугольника ABC больше стороны AC, а угол A равен $40°$. Точка D лежит на стороне AB, причём $BD = AC$. Точки M и N — середины отрезков BC и AD соответственно. Найдите угол BNM.

$\boxed{20°}$

34. В выпуклом четырёхугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырёхугольника. Докажите, что диагонали равны.

35. Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, вписан в окружность с центром O. Известно, что $CD = a$. Найдите расстояние от точки O до стороны AB.

$\boxed{a/2}$

36. Докажите, что расстояние от вершины A треугольника ABC до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны BC.

37. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что расстояние между серединами отрезков BC и AH равно радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

38. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1. На продолжении медианы CC_1 за точку C отложен отрезок C_1C_2, равный $CC_1/3$. При этом $B_1C_2 = B_1A$. Докажите, что $BB_1 \perp CC_1$.

39. Точки K, L, M и N — середины соответственно сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$. Точки P и Q — середины отрезков KM и LN соответственно. Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = AE/4$.

40. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и BC соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC пересекаются в одной точке.

41. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C. Точки M, N и K являются серединами отрезков BD, AC и CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK равносторонний.

42. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и AC опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Точка D — середина AB. Докажите, что $DK = DM$.