Сфера и шар

Задача 1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012.2*) В желобе, имеющем форму двугранного угла величины $2\arcsin\frac{1}{3}$, неподвижно лежит шар радиуса 3, касаясь при этом обеих граней. Другой шар скользит вдоль желоба, также постоянно касаясь каждой из граней, и проскальзывает мимо неподвижно лежащего шара, не сталкиваясь с ним и даже не касаясь его. Найдите все возможные значения радиуса скользящего шара.

$\boxed{\left(0; \frac{3}{2}\right) \cup (6; +\infty)}$

Задача 2. (*МГУ, ДВИ, 2011.7*) В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?

$\boxed{1}$

Задача 3. (*МФТИ, 2001.6*) Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении между r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус шара, касающего всех четырех шаров внешним образом.

$\boxed{R \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) r;\ \rho = \frac{R\left(R+r-\sqrt{R^2+2Rr-\frac{r^2}{3}}\right)}{r+\sqrt{R^2+2Rr-\frac{r^2}{3}}-R}}$

Задача 4. (*МГУ, мехмат, 2002-07.2*) Три сферы, радиусы которых соответственно равны $\sqrt{6}$, 1 и 1, попарно касаются друг друга. Через прямую, содержащую центры A и B второй и третьей сфер, проведена плоскость γ так, что центр O первой сферы удален от этой плоскости на расстояние 1. Найти угол между проекциями прямых OA и OB на плоскость γ и сравнить его с $\arccos\frac{4}{5}$.

$\boxed{\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}}$

Задача 5. (*МГУ, мехмат, 2006.3*) Две сферы касаются друг друга внешним образом. Радиус одной сферы в три раза больше радиуса другой. Скрещивающиеся прямые a и b параллельны некоторой плоскости, проходящей через центры сфер. Каждая из прямых a и b касается обеих сфер, а расстояние между этими прямыми равно диаметру меньшей сферы. Найти угол между прямыми a и b.

$\boxed{90^\circ}$

Задача 6. (*МГУ, мехмат, 1999-07.6*) Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найти расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

$\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{5}}}$

Задача 7. (*МГУ, мехмат, 2004-03.6*) Дана сфера радиуса 1 с центром в точке O. Из точки A, лежащей вне сферы, проведены четыре луча. Первый луч пересекает поверхность сферы последовательно в точках B_1 и C_1, второй — в точках B_2 и C_2, третий — в точках B_3 и C_3, четвертый — в точках B_4 и C_4. Прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в точке E, прямые B_3B_4 и C_3C_4 — в точке F. Найти объем пирамиды $OAEF$, если $AO = 2$, $EO = FO = 3$, а угол между гранями AOE и AOF равен 30°.

$\boxed{\frac{35}{24}}$

Задача 8. (*МГУ, мехмат, 2000-03.6*) Вершины квадрата $PQRS$ со стороной $\frac{25}{4}$ лежат на сфере. Параллельные друг другу прямые проходят через точки P, Q, R и S и повторно пересекают сферу в точках P_1, Q_1, R_1 и S_1 соответственно. Известно, что $PP_1 = 2$, $QQ_1 = 10$, $RR_1 = 6$. Найти длину отрезка SS_1.

$\boxed{2}$

Задача 9. (*Всеросс., 2016, РЭ, 11.6*) В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер — красного цвета, а остальные — зелёного. Каждую точку касания красной и зелёной сферы покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек.

Задача 10. (*Всеросс., 2015, РЭ, 11.6*) Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)

Задача 11. (*Всеросс., 2018, РЭ, 11.10*) На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A, а на сфере ω_2 — фиксированная точка B. На сфере ω_1 выбирается переменная точка X, а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере.

Задача 12. (*Всеросс., 2002, ОЭ, 11*) Высота четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей её основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

Задача 13. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 11*) Точка O — основание высоты четырёхугольной пирамиды. Сфера с центром O касается всех боковых граней пирамиды. Точки A, B, C и D взяты последовательно по одной на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки AB, BC и CD проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок AD проходит через четвёртую точку касания.

Задача 14. (*Всеросс., 1994, ОЭ, 11*) На боковых рёбрах SA, SB и SC правильной треугольной пирамиды $SABC$ взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны. Пусть O — центр сферы, проходящей через точки S, A, B и C_1. Докажите, что прямая SO перпендикулярна плоскости A_1B_1C.

Задача 15. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 11*) Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера S_1, проходящая через точки A, B, C, пересекает рёбра AD, BD, CD в точках K, L, M соответственно; сфера S_2, проходящая через точки A, B, D, пересекает ребра AC, BC, DC в точках P, Q, M соответственно. Оказалось, что $KL \parallel PQ$. Докажите, что биссектрисы плоских углов KMQ и LMP совпадают.

Задача 16. (*Всеросс., 2016, финал, 11*) В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке.

Задача 17. (*Всеросс., 2008, финал, 11*) Каждую грань тетраэдра можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что весь тетраэдр можно поместить в шар радиуса $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Задача 18. (*Всеросс., 2007, финал, 11*) Дана треугольная пирамида. Лёша хочет выбрать два её скрещивающихся ребра и на них, как на диаметрах, построить шары. Всегда ли он может выбрать такую пару, что любая точка пирамиды лежит хотя бы в одном из этих шаров?

Задача 19. (*Всеросс., 1995, финал, 11*) Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении 2 : 1, считая от вершин, лежат на одной сфере.

Задача 20. (*Турнир городов, 2010, 10–11*) Сфера касается всех рёбер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных рёбер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

Задача 21. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) На каждом из 12 рёбер куба отметили его середину. Обязательно ли сфера проходит через все отмеченные точки, если известно, что она проходит

а) через какие-то 6 из отмеченных точек;

б) через какие-то 7 из отмеченных точек?

Задача 22. (*Турнир городов, 2013, 10–11*) а) Внутри сферы находится некоторая точка A. Через A провели три попарно перпендикулярные прямые, которые пересекли сферу в шести точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора такой тройки прямых.

б) Внутри сферы находится икосаэдр, его центр A не обязательно совпадает с центром сферы. Лучи, выпущенные из A в вершины икосаэдра, высекают 12 точек на сфере. Икосаэдр повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают 12 новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек.

Задача 23. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 10*) В пространстве отмечены 5 точек. Известно, что это центры сфер, четыре из которых попарно касаются извне и касаются изнутри пятой сферы. При этом невозможно определить, какая точка является центром объемлющей сферы. Найдите отношение радиусов наибольшей и наименьшей сферы.

$\boxed{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}$

Задача 24. (*Турнир городов, 1988, 9–10*) Можно ли подобрать четыре непрозрачных попарно непересекающихся шара так, чтобы ими можно было загородить точечный источник света?

Задача 25. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) На сферической планете с длиной экватора 1 планируют проложить N кольцевых дорог, каждая из которых будет идти по окружности длины 1. Затем по каждой дороге запустят несколько поездов. Все поезда будут ездить по дорогам с одной и той же положительной постоянной скоростью, никогда не останавливаясь и не сталкиваясь. Какова в таких условиях максимально возможная суммарная длина всех поездов? Поезда считайте дугами нулевой толщины, из которых выброшены концевые точки. Решите задачу в случаях: а) $N = 3$; б) $N = 4$.

Задача 26. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной h (надрез — это сегмент круга, h — высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если

а) $h = 17$ см;

б) $h = 18$ см?

Задача 27. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка — точка, у которой все три декартовы координаты — рациональные числа.)

Задача 28. (*Турнир городов, 1991, 10–11*) На сфере отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на большой окружности (большая окружность — это окружность, по которой пересекаются сфера и плоскость, проходящая через её центр). Две большие окружности, не проходящие через отмеченные точки, называются *эквивалентными*, если одну из них с помощью непрерывного перемещения по сфере можно перевести в другую так, что в процессе перемещения окружность не проходит через отмеченные точки.

а) Сколько можно нарисовать окружностей, не проходящих через отмеченные точки и не эквивалентных друг другу?

б) Та же задача для n отмеченных точек.

Задача 29. (*ММО, 2016, 10*) В куб с ребром 1 поместили 8 непересекающихся шаров (возможно, разного размера). Может ли сумма диаметров этих шаров быть больше 4?

Задача 30. (*ММО, 2015, 11.5*) На поверхности сферической планеты расположены четыре материка, отделённые друг от друга океаном. Назовем точку океана *особой*, если для нее найдутся не менее трёх ближайших (находящихся от нее на равных расстояниях) точек суши, причём все на разных материках. Какое наибольшее число особых точек может быть на этой планете?

Задача 31. (*ММО, 2018, 11.5*) Женя красила шарообразное яйцо последовательно в пяти красках, погружая его в стакан с очередной краской так, чтобы окрашивалась ровно половина площади поверхности яйца (полсферы). В результате яйцо окрасилось полностью. Докажите, что одна из красок была лишней, то есть если бы Женя не использовала эту краску, а в другие краски погружала бы яйцо так же, то оно всё равно окрасилось бы полностью.

Задача 32. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2015, 10–11*) В пространстве дан треугольник ABC и сферы S_1 и S_2, каждая из которых проходит через точки A, B и C. Для точек M сферы S_1, не лежащих в плоскости треугольника ABC, проводятся прямые MA, MB и MC, пересекающие сферу S_2 вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что плоскости, проходящие через точки A_1, B_1 и C_1, касаются фиксированной сферы либо проходят через фиксированную точку.