Стереометрия на ЕГЭ по математике

Многогранники в задаче №16

Цель данного пособия — помочь школьнику научиться решать задачи №16 (в прошлом С2) единого госэкзамена по математике (профильный уровень).

Тема пособия — вычисление расстояний и углов в простейших многогранниках (призмах и пирамидах). К этой теме относятся почти все задачи по стереометрии, предлагавшиеся на ЕГЭ и в различных работах МИОО начиная с 2009–2010 учебного года.

В пособии рассматриваются стандартные методы решения стереометрических задач, традиционно изучаемые в школьной программе. Мы не включаем сюда методы аналитической геометрии (основанные на скалярном произведении векторов и уравнении плоскости) — как во избежание разрастания объёма текста, так и в силу личных предпочтений автора.

Никаких предварительных знаний по стереометрии от школьника не требуется. Пособие рассчитано на школьников с любым начальным уровнем. Оно содержит материал, необходимый и достаточный для полноценной подготовке к задаче №16, а именно:

- всю нужную теорию и примеры решения задач;
- сто тренировочных задач на разные темы — от самых элементарных до уровня задачи №16 и выше;
- Задачник ЕГЭ-16 — более 70 реальных задач №16 (С2), предлагавшихся на ЕГЭ и в различных работах МИОО начиная с 2009 года.

Автор не преследовал цели дать строгое изложение стереометрии. Соответственно, данное пособие — не замена школьному учебнику, но лишь дополнение к нему. Оно может рассматриваться как сборник задач, позволяющий школьнику как можно лучше освоиться со спецификой задачи №16 на ЕГЭ по математике.

Содержание

1 Пирамида

Пирамида и призма присутствуют в очень многих задачах по стереометрии (в частности, они фигурируют почти во всех задачах №16 (С2), предлагавшихся на ЕГЭ по математике с 2010 года). Данный раздел посвящён пирамиде.

Самая простая пирамида — это *треугольная пирамида*, или *тетраэдр*[1]. На рис. 1 изображена треугольная пирамида $ABCD$. Точки A, B, C, D — это *вершины* пирамиды. Треугольники ABC, ABD, BCD, ACD — это *грани* пирамиды.

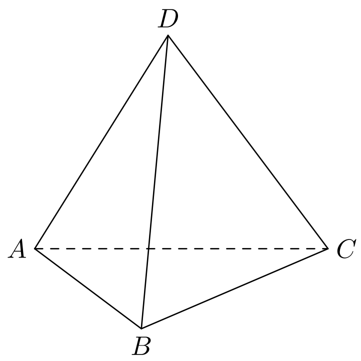


Рис. 1. Треугольная пирамида

В основании пирамиды лежит треугольник ABC, и, соответственно, грань ABC называется *основанием* пирамиды. Остальные грани — ABD, BCD и ACD — называются *боковыми гранями*. Понятно, что на какую грань поставишь треугольную пирамиду — та и будет основанием, а остальные грани тогда станут боковыми.

Отрезки AB, BC, AC, AD, BD, CD, являющиеся сторонами граней, называются *рёбрами* пирамиды. При этом отрезки AD, BD и CD называются также *боковыми рёбрами*.

На рис. 2 изображена четырёхугольная пирамида $ABCDS$. Её основанием служит четырёхугольник $ABCD$.

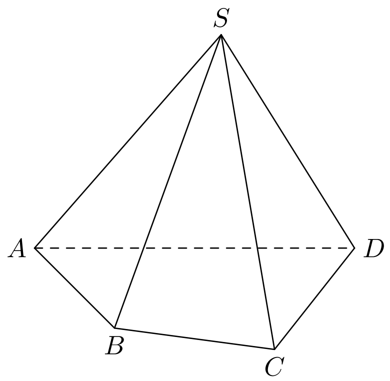


Рис. 2. Четырёхугольная пирамида

Вершиной данной четырёхугольной пирамиды называется точка S. Точки A, B, C, D называются *вершинами основания*.

Отрезки SA, SB, SC, SD, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, снова называются *боковыми рёбрами*, а треугольники SAB, SBC, SCD и SAD — *боковыми гранями* пирамиды.

Обратите внимание, что теперь грани не являются равноправными: основание — это четырёхугольник, а боковые грани — треугольники.

[1] *Тетраэдр* по-гречески означает *четырёхгранник*.

На рис. 3 показаны ещё две пирамиды — пятиугольная и шестиугольная.

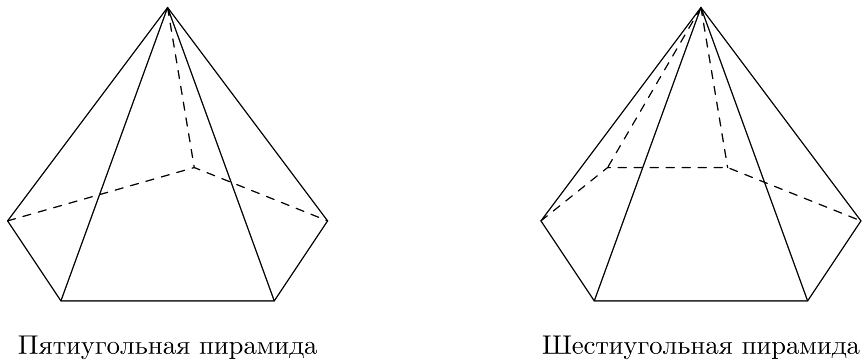


Рис. 3. Многоугольные пирамиды

Основанием пятиугольной пирамиды служит пятиугольник; основанием шестиугольной пирамиды служит шестиугольник. Боковые рёбра соединяют вершины основания с фиксированной точкой — вершиной пирамиды, которая лежит вне плоскости основания. Боковыми гранями пирамиды являются треугольники, образованные двумя соседними боковыми рёбрами и соответствующей стороной основания.

Аналогично описывается произвольная n-угольная пирамида: в её основании лежит n-угольник, а боковыми гранями являются треугольники с общей вершиной (которая и называется вершиной пирамиды).

1.1 Высота пирамиды

Высота пирамиды — это перпендикуляр[2], проведённый из вершины пирамиды на плоскость её основания. Длина h этого перпендикуляра также называется высотой пирамиды.

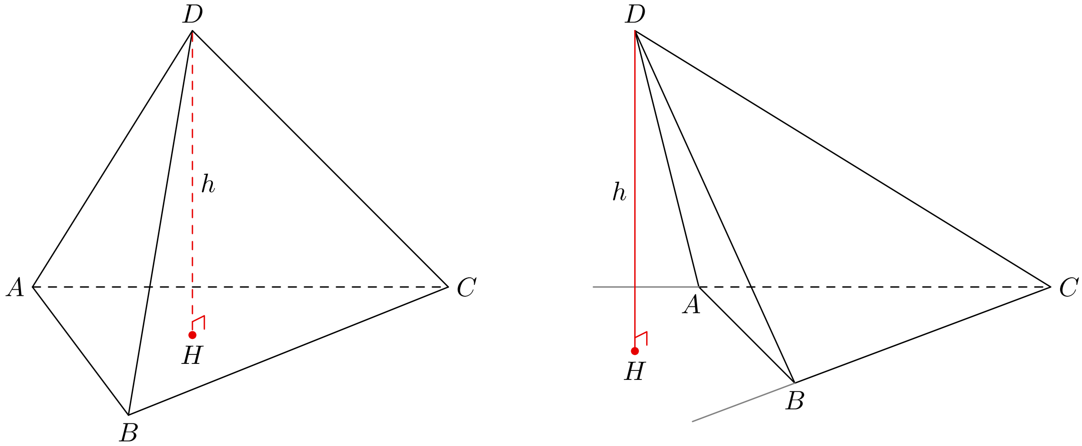


Рис. 4. Высота пирамиды

На рис. 4 изображена треугольная пирамида $ABCD$, из вершины D которой проведена высота DH к плоскости ABC. Точка H лежит в плоскости ABC и называется *основанием высоты*. Как видите, основание высоты может оказаться где угодно — как внутри грани (левый рисунок), так и вне грани (правый рисунок).

[2]Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Если через точку D проведена прямая, перпендикулярная плоскости ABC и пересекающая её в точке H, то отрезок DH называется *перпендикуляром* к плоскости. Сейчас вполне достаточно интуитивного понимания перпендикулярности прямой и плоскости; позже мы обсудим это понятие более подробно.

Имеется, однако, важный частный случай, когда мы можем точно указать, в какую именно точку основания попадёт основание высоты.

Теорема. Если в n-угольной пирамиде боковые рёбра равны, то основание высоты совпадает с центром окружности, описанной вокруг n-угольника, лежащего в основании пирамиды.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением треугольной пирамиды (в общем случае доказательство совершенно аналогично). Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида с равными боковыми рёбрами, в которой проведена высота DH (рис. 5).

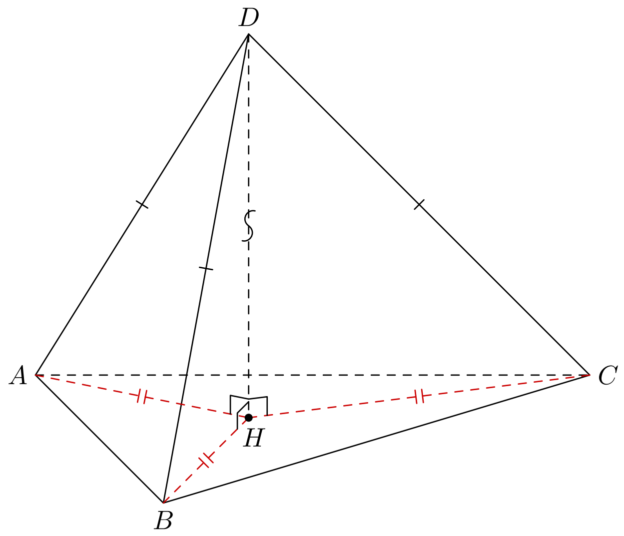


Рис. 5. К доказательству теоремы

Треугольники ADH, BDH и CDH — прямоугольные с общим катетом DH. Их гипотенузы равны, поэтому данные треугольники равны по гипотенузе и катету. Следовательно, равны их вторые катеты: $AH = BH = CH$.

Таким образом, точка H равноудалена от точек A, B, C и потому является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Теорема доказана.

Можно запомнить эту теорему и в такой формулировке: *если боковые рёбра пирамиды равны, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания окружности.*

1.2 Объём пирамиды

Объём пирамиды вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

где S — площадь основания, h — высота пирамиды.

Для треугольной пирамиды всё равно, какую грань считать основанием (разумеется, в таком случае h будет высотой, опущенной на выбранное основание). Мы можем «поставить» треугольную пирамиду так, как нам удобно, и этот факт часто помогает при решении задач.

Задача. Найти объём треугольной пирамиды с рёбрами 6, 8, 10, 13, 13, 13.

Решение. Какую грань выбрать в качестве основания? Здесь сомнений нет: естественно, ту, стороны которой равны 6, 8 и 10. Почему?

Прежде всего, треугольник со сторонами 6, 8, 10 является прямоугольным в силу обратной теоремы Пифагора (поскольку $6^2 + 8^2 = 10^2$). Это уже хорошо.

Кроме того, при таком выборе основания боковые рёбра пирамиды оказываются равными (13, 13 и 13). Значит, вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной вокруг основания.

А где находится центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника? В середине гипотенузы! Делаем рисунок (рис. 6).

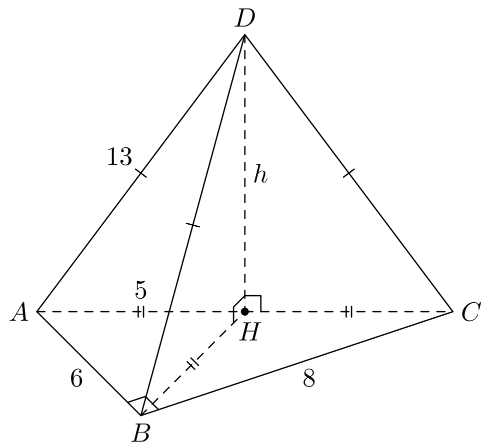


Рис. 6. К задаче

В основании нашей пирамиды лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Точка H — середина гипотенузы; $h = DH$ — высота пирамиды.

Площадь основания ABC равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

Высоту пирамиды находим по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

И, наконец, вычисляем объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 12 = 96.$$

1.3 Правильная пирамида

Мы уже убедились, что равенство боковых рёбер пирамиды позволяет легче проводить вычисления. Теперь наложим ещё одно дополнительное требование — на сей раз к основанию пирамиды — и придём к важнейшему понятию *правильной пирамиды.*

Правильная пирамида — это пирамида, у которой боковые рёбра равны, а в основании лежит правильный n-угольник.

Легко видеть, что *вершина правильной пирамиды проектируется в центр симметрии правильного n-угольника, лежащего в её основании.* В самом деле, из равенства боковых рёбер следует, что вершина проектируется в центр описанной вокруг основания окружности, который в случае правильного n-угольника совпадает с центром его симметрии.

Чаще всего в задачах встречаются правильная треугольная и правильная четырёхугольная пирамида. Продублируем определение для этих двух случаев.

- **Правильная треугольная пирамида** — это пирамида с равными боковыми рёбрами, основанием которой служит равносторонний треугольник.

- **Правильная четырёхугольная пирамида** — это пирамида с равными боковыми рёбрами, основанием которой служит квадрат.

Правильную треугольную и правильную четырёхугольную пирамиду лучше всего рисовать следующим образом (рис. 7).

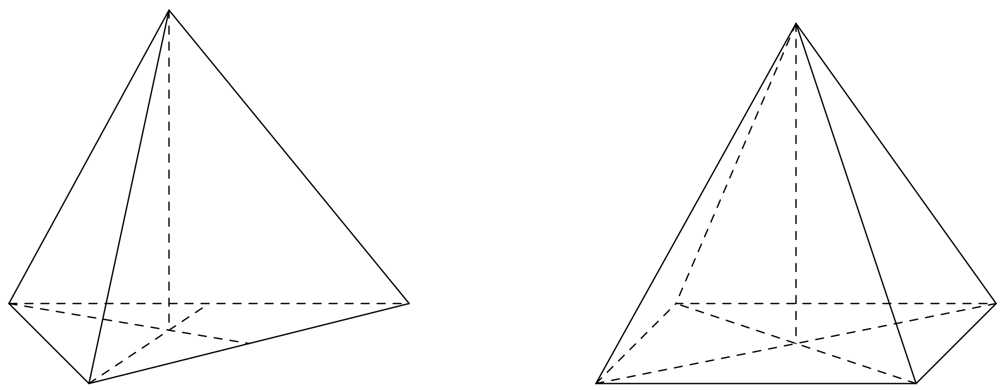


Рис. 7. Как рисовать правильную пирамиду

Последовательность действий такая: 1) рисуем основание пирамиды; 2) строим центр основания, проводя медианы треугольника или диагонали квадрата; 3) из центра ведём вверх высоту и отмечаем на ней вершину пирамиды; 4) соединяем вершину пирамиды с вершинами основания.

В самом начале мы сказали, что треугольная пирамида и тетраэдр — это синонимы. Однако правильный тетраэдр и правильная треугольная пирамида — не одно и то же! Такой вот терминологический курьёз.

Правильный тетраэдр — это треугольная пирамида, все рёбра которой равны.

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро может быть не равно стороне основания; иными словами, боковые грани правильной треугольной пирамиды — равнобедренные, но не обязательно равносторонние треугольники. В правильном тетраэдре все четыре грани — равносторонние треугольники.

Задача. Найти объём правильного тетраэдра со стороной a.

Решение. Делаем рисунок (рис. 8).

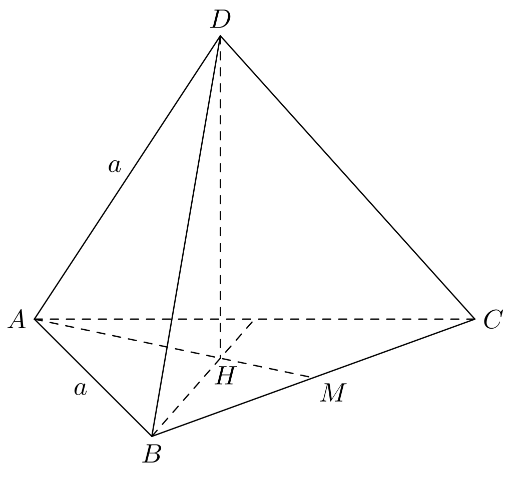


Рис. 8. К задаче

Нам нужно выразить через a площадь S треугольника ABC и высоту тетраэдра DH. Высоту будем искать из треугольника ADH; для этого в треугольнике ABC надо будет найти AH.

Сделаем планиметрический чертёж треугольника ABC (рис. 9). Его площадь проще всего найти как половину произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

(данную формулу площади правильного треугольника имеет смысл помнить).

Длину отрезка AH находим из прямоугольного треугольника AHN:

$$AH = \frac{AN}{\cos 30^\circ} = \frac{a/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

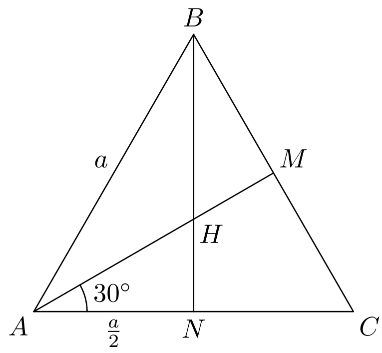


Рис. 9. К задаче

(желательно помнить и это выражение для радиуса окружности, описанной вокруг правильного треугольника).

Высоту тетраэдра найдём из прямоугольного треугольника ADH:

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

И теперь находим объём:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

1.4 Площадь поверхности пирамиды

Площадь поверхности пирамиды — это сумма площадей всех её граней. **Площадь боковой поверхности пирамиды** — это сумма площадей всех её боковых граней.

Задача. Найти площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5.

Решение. Пусть $ABCDE$ — наша пирамида (рис. 10).

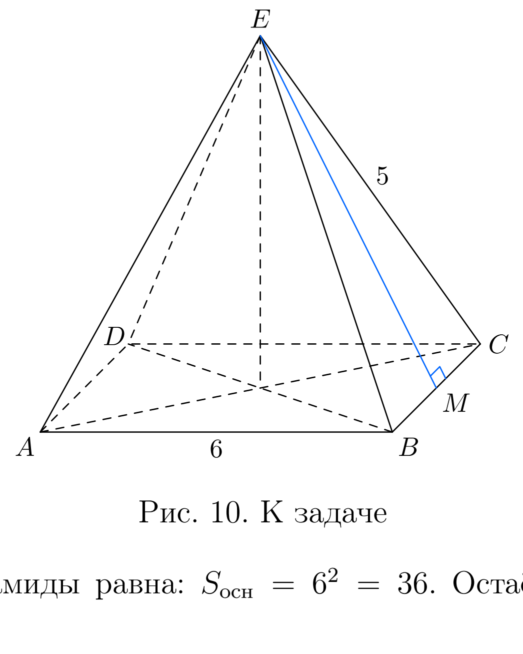


Рис. 10. К задаче

Площадь основания пирамиды равна: $S_{\text{осн}} = 6^2 = 36$. Остаётся найти площадь боковой поверхности.

Проведём высоту EM боковой грани пирамиды[3]. Треугольник BEC — равнобедренный; значит, EM является также его медианой, и потому $MC = 3$. Отсюда

$$EM = \sqrt{EC^2 - MC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Следовательно, площадь S_1 боковой грани равна:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 4S_1 = 4 \cdot 12 = 48.$$

Площадь поверхности пирамиды:

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 36 + 48 = 84.$$

[3] Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из вершины пирамиды, называется *апофемой*.

2 Призма

Призма встречается в задачах по стереометрии столь же часто, как и пирамида. В данном разделе мы вводим основную терминологию, связанную с понятием призмы.

Рассмотрим в пространстве треугольник ABC. Предположим, что треугольник $A_1B_1C_1$ лежит в плоскости, параллельной плоскости ABC, и получается из треугольника ABC параллельным сдвигом. Соединим соответствующие вершины — A и A_1, B и B_1, C и C_1 — и получим *треугольную призму* $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 11).

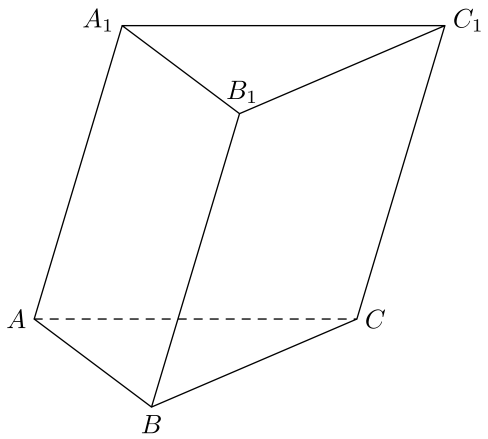


Рис. 11. Треугольная призма

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *основаниями* призмы. Три параллелограмма ABB_1A_1, BCC_1B_1 и ACC_1A_1 — это *боковые грани* призмы. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — это *боковые рёбра* призмы.

Таким образом, основания треугольной призмы — равные треугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковые грани — параллелограммы.

Аналогично получается *четырёхугольная призма* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12).

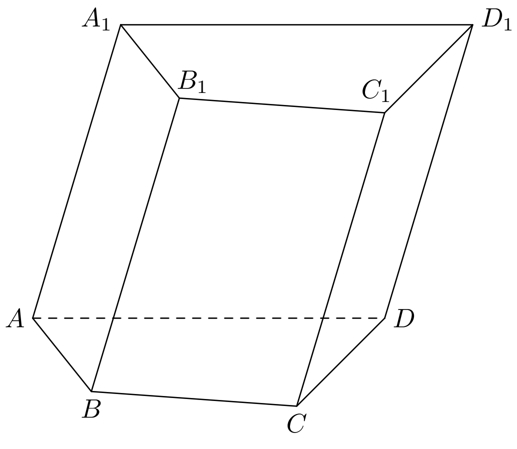


Рис. 12. Четырёхугольная призма

Основаниями этой призмы служат равные четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащие в параллельных плоскостях. Боковые грани призмы — снова параллелограммы. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 — боковые рёбра призмы.

Вообще, *в n-угольной призме основаниями служат равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковые грани являются параллелограммами*. Боковые рёбра призмы, будучи параллельными сторонами параллелограммов, равны друг другу.

На приведённых выше рисунках боковые рёбра призмы наклонены к плоскостям оснований: обе призмы являются *наклонными*. Однако в задачах и на практике (в оптике, например) наиболее часто встречается *прямая* призма.

2.1 Прямая призма

Прямая призма — это призма, боковые рёбра которой перпендикулярны плоскостям оснований.

На рис. 13 изображены две прямые призмы — треугольная и четырёхугольная.

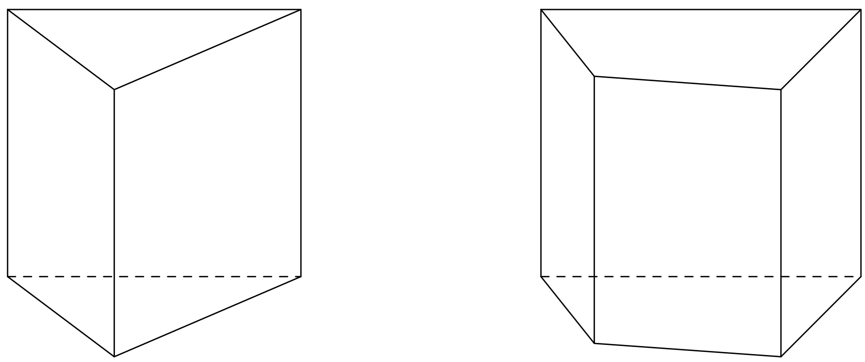


Рис. 13. Прямая призма

Как видите, боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

2.2 Правильная призма

Правильная n-угольная призма — это прямая призма, основанием которой служит правильный n-угольник.

На рис. 14 изображены две правильные призмы — треугольная и четырёхугольная. Штрихи на равных отрезках поставлены исключительно для наглядности — на рисунках в задачах их можно не ставить.

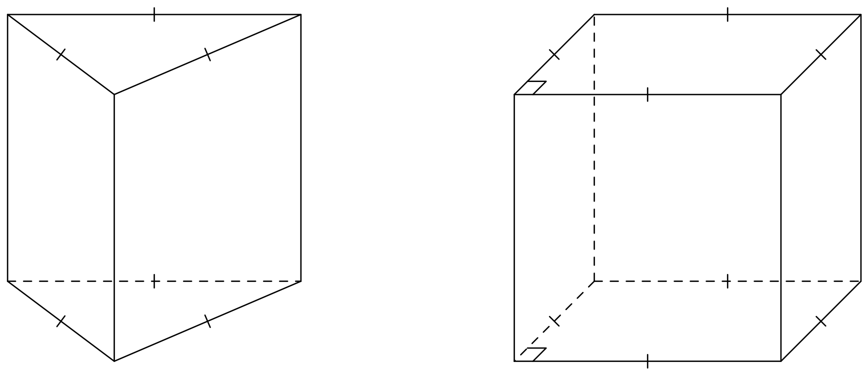


Рис. 14. Правильная призма

Поскольку эти случаи встречаются часто, мы специально для них конкретизируем общее определение.

- **Правильная треугольная призма** — это прямая призма, основанием которой является равносторонний треугольник.

- **Правильная четырёхугольная призма** — это прямая призма, основанием которой является квадрат.

  Если боковое ребро правильной четырёхугольной призмы равно стороне основания, то получается хорошо известный вам **куб**.

Вы видите, что боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.

На ЕГЭ по математике в задачах С2 попадается правильная шестиугольная призма. Посмотрите, как её надо рисовать (рис. 15).

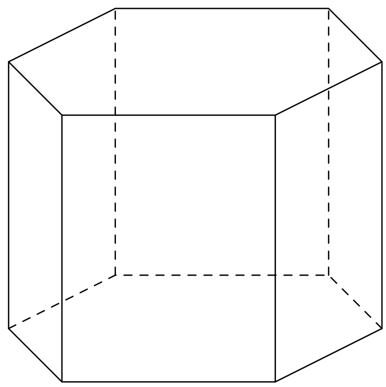
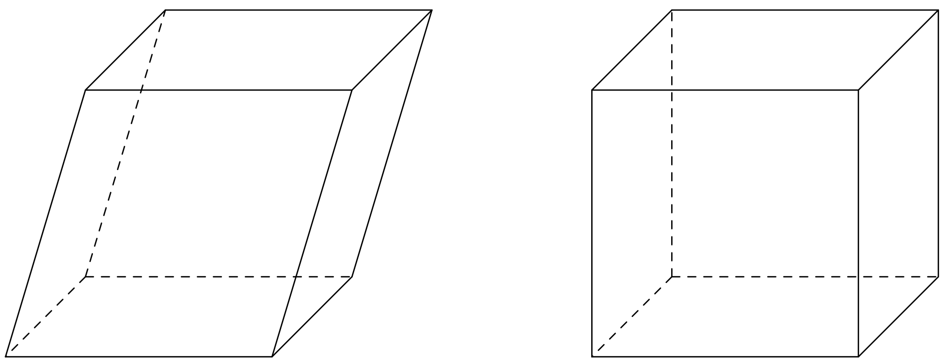


Рис. 15. Правильная шестиугольная призма

2.3 Параллелепипед

Параллелепипед — это призма, основанием которой служит параллелограмм.

Таким образом, все грани параллелепипеда являются параллелограммами. На рис. 16 изображены *наклонный параллелепипед* (боковые рёбра которого наклонены к плоскости основания) и *прямой параллелепипед* (боковые рёбра которого перпендикулярны плоскости основания).



Наклонный параллелепипед	Прямой параллелепипед

Рис. 16. Параллелепипед

Подчеркнём, что в основании (прямого) параллелепипеда может лежать какой угодно параллелограмм. Особый интерес представляет следующий частный случай.

Прямоугольный параллелепипед — это прямая призма, в основании которой лежит прямоугольник.

Изображается прямоугольный параллелепипед точно так же, как и прямой параллелепипед на рис. 16 (ведь на таких чертежах невозможно передать информацию о величине углов).

Диагональю параллелепипеда называется отрезок, который соединяет вершины параллелепипеда, на принадлежащие одной грани. Всего у параллелепипеда восемь вершин, так что имеются четыре диагонали (рис. 17).

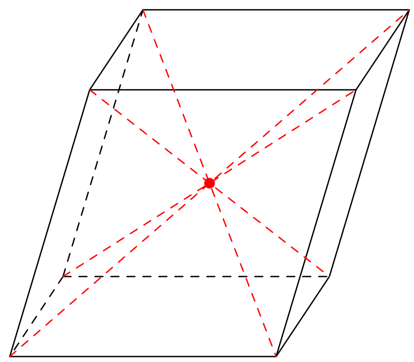


Рис. 17. Диагонали параллелепипеда

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке, которая является центром симметрии параллелепипеда.

2.4 Объём и площадь поверхности призмы

Объём призмы вычисляется по формуле:

$$V = Sh,$$

где S — площадь основания призмы, h — её высота. При этом *высотой* призмы называется общий перпендикуляр к основаниям призмы (а также длина этого перпендикуляра, рис. 18).

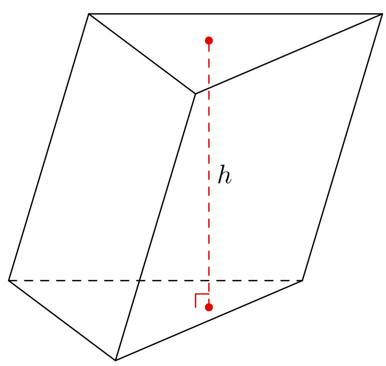


Рис. 18. Высота призмы

У прямой призмы высота совпадает с боковым ребром.

Особенно просто вычисляется объём прямоугольного параллелепипеда. Если его боковое ребро равно c, а в основании лежит прямоугольник со сторонами a и b, то площадь основания $S = ab$, и тогда объём:

$$V = abc.$$

Площадь боковой поверхности призмы — это сумма площадей её боковых граней.

Площадь поверхности призмы — это сумма площадей всех её граней. Ясно, что площадь поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площадей двух оснований.

Никаких формул для площади боковой или полной поверхности мы приводить не будем. Запоминать их смысла нет — лучше вычислять эти площади непосредственно в каждой конкретной задаче.

3 Взаимное расположение прямых в пространстве

Существует три варианта взаимного расположения двух прямых в пространстве: прямые могут быть *пересекающимися*, *параллельными* и *скрещивающимися*.

3.1 Пересекающиеся прямые

Две различные прямые называются *пересекающимися*, если они имеют общую точку. Точка пересечения единственна: если две прямые имеют две общие точки, то они совпадают.

Пересекающиеся прямые изображены на рис. 19. Прямые a и b, как видим, пересекаются в точке A.

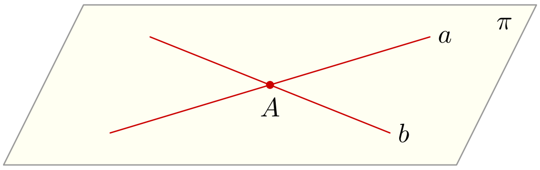


Рис. 19. Пересекающиеся прямые

Заметьте, что существует единственная плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые. Это также показано на рис. 19: через прямые a и b проходит единственная плоскость π.

Вопрос. Прямая a пересекает прямую b, прямая b пересекает прямую c. Верно ли, что прямые a и c пересекаются?

3.2 Параллельные прямые

Ещё с седьмого класса вы помните, что «параллельные прямые — это те, которые не пересекаются». В пространстве, однако, для параллельности прямых нужно одно дополнительное условие.

Определение. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Таким образом, помимо «непересечения» требуется, чтобы прямые лежали в одной плоскости. На рис. 20 показаны параллельные прямые a и b; через них проходит (единственная) плоскость π.

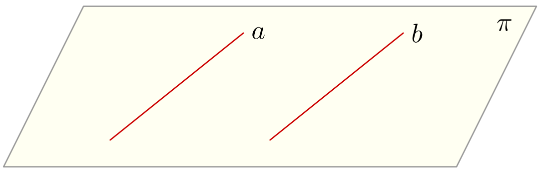


Рис. 20. Параллельные прямые

Параллельность обладает важным свойством *транзитивности*. Именно, для трёх различных прямых a, b и c выполнено:

$$a \parallel b \text{ и } b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$$

(две различные прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой).

3.3 Скрещивающиеся прямые

Если две прямые пересекаются или параллельны, то, как мы видели, через них можно провести плоскость (и притом единственную). В пространстве, однако, провести плоскость через две прямые в общем случае нельзя.

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если они не параллельны и не пересекаются.

Равносильное определение такое: *две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.*

На рис. 21 показаны скрещивающиеся прямые a и b.

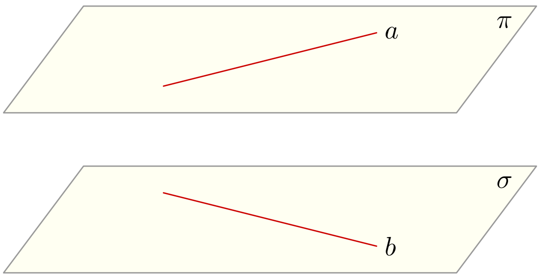


Рис. 21. Скрещивающиеся прямые

Важный факт состоит в том, что через две скрещивающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости[4]. Именно, *если прямые a и b скрещиваются, то существует единственная пара плоскостей π и σ таких, что $a \subset \pi$, $b \subset \sigma$ и $\pi \parallel \sigma$.* Это и показано на рис. 21.

Все три рассмотренных варианта взаимного расположения прямых можно видеть в треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 22).

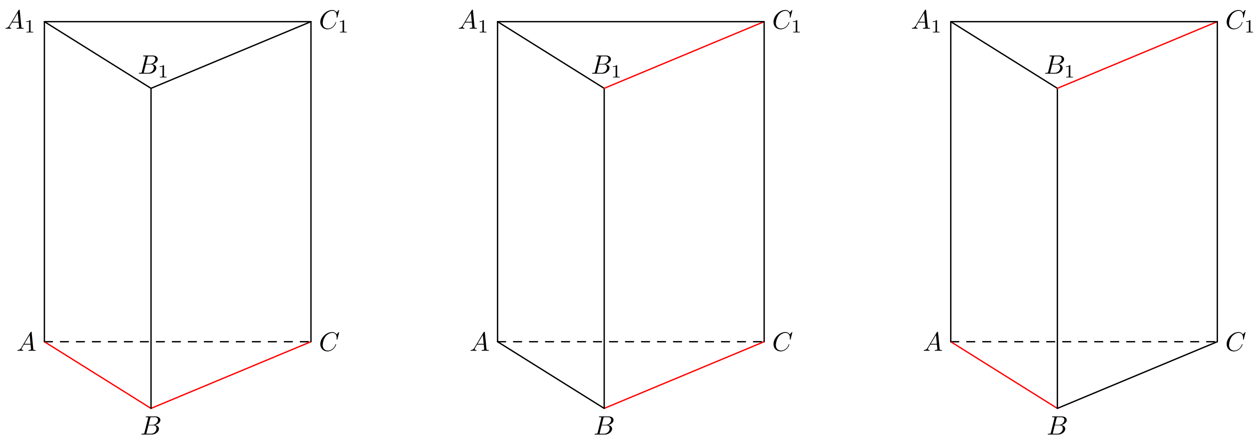


Рис. 22. Взаимное расположение двух прямых

Именно, прямые AB и BC пересекаются (левый рисунок); прямые BC и B_1C_1 параллельны (рисунок в центре); прямые AB и B_1C_1 скрещиваются (правый рисунок).

[4]Плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

4 Угол между скрещивающимися прямыми

Скрещивающиеся прямые не пересекаются. Можно ли в таком случае говорить об угле между ними? Оказывается, можно.

4.1 Угол между пересекающимися прямыми

Вспомним сначала, что такое угол между пересекающимися прямыми. Пусть прямые a и b пересекаются (рис. 23). При этом образуются четыре угла. Если все углы равны друг другу, то прямые a и b называются *перпендикулярными* (левый рисунок), и угол между этими прямыми равен $90°$. Если не все углы равны друг другу (то есть образуются два равных острых угла и два равных тупых угла), то углом между прямыми a и b называется *острый* угол φ (правый рисунок).

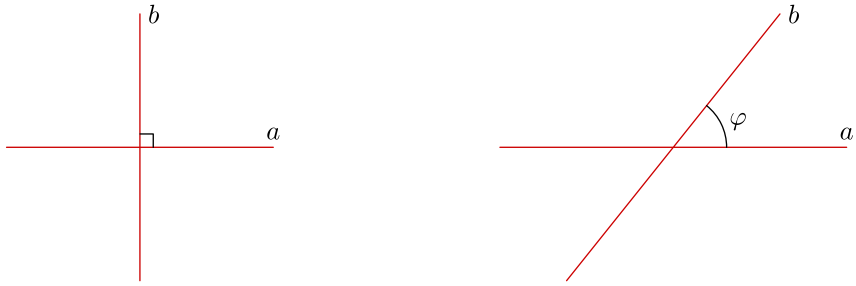


Рис. 23. Угол между пересекающимися прямыми

4.2 Определение угла между скрещивающимися прямыми

Теперь введём понятие угла между скрещивающимися прямыми.

Пусть прямые a и b скрещиваются. Возьмём в пространстве произвольную точку M. Дальнейшие действия зависят от того, принадлежит точка M одной из наших прямых или нет.

1. Пусть точка M не принадлежит ни прямой a, ни прямой b. Проведём через M прямую a', параллельную a, и прямую b', параллельную b (рис. 24). Прямые a' и b' пересекаются; тогда угол φ между этими прямыми и называется углом между прямыми a и b.

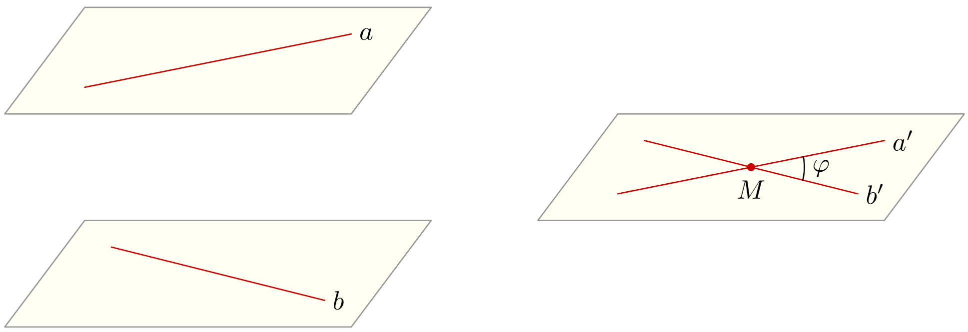


Рис. 24. Угол между скрещивающимися прямыми

Таким образом, *угол между скрещивающимися прямыми a и b — это угол между пересекающимися прямыми a' и b', такими, что $a' \parallel a$ и $b' \parallel b$.*

2. Пусть точка M принадлежит одной из прямых; например, пусть $M \in a$. Проведём через точку M прямую b', параллельную b (рис. 25). Прямые a и b' пересекаются; угол φ между этими прямыми и называется углом между прямыми a и b.

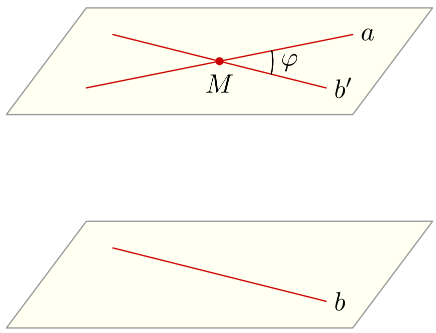


Рис. 25. Угол между скрещивающимися прямыми

Итак, *угол между скрещивающимися прямыми a и b — это угол между прямой a и прямой b', параллельной b и пересекающей a.*

Можно показать, что определение угла между скрещивающимися прямыми является корректным, то есть не зависит от конкретного выбора точки M (иными словами, как точку M ни выбирай, угол φ всегда получится одним и тем же). Поэтому в конкретных задачах выбор точки M диктуется исключительно соображениями удобства.

4.3 Примеры решения задач

Разберём три задачи, расположенные по возрастанию сложности. Третья задача сопоставима с задачами №16, предлагающимися на ЕГЭ по математике.

Задача 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми: а) A_1C_1 и BD; б) A_1B и B_1C.

Решение. Делаем чертёж (рис. 26). Прямые, угол между которыми надо найти, изображены красным цветом.

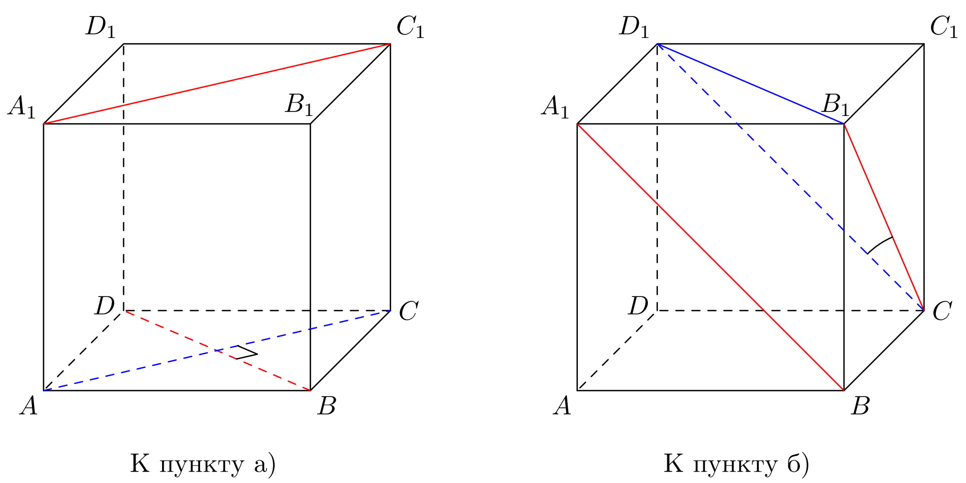


Рис. 26. К задаче 1

а) Проведём $AC \parallel A_1C_1$. Угол между прямыми A_1C_1 и BD есть угол между прямыми AC и BD. Но $AC \perp BD$ как диагонали квадрата. Поэтому $A_1C_1 \perp BD$.

б) Проведём $D_1C \parallel A_1B$. Угол между прямыми A_1B и B_1C есть угол между прямыми D_1C и B_1C (то есть угол D_1CB_1). Треугольник D_1CB_1 равносторонний: $D_1C = CB_1 = B_1D_1$ как диагонали равных квадратов, являющихся гранями куба. Следовательно, $\angle D_1CB_1 = 60°$.

Ответ: а) $90°$; б) $60°$.

Задача 2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) боковое ребро равно стороне основания. Точка M — середина ребра SB. Найдите угол между прямыми CM и SO, где O — центр основания пирамиды.

Решение. Пусть N — середина отрезка BO (рис. 27). Тогда MN — средняя линия треугольника SBO. Следовательно, $MN \parallel SO$, и потому искомый угол есть $\varphi = \angle CMN$.

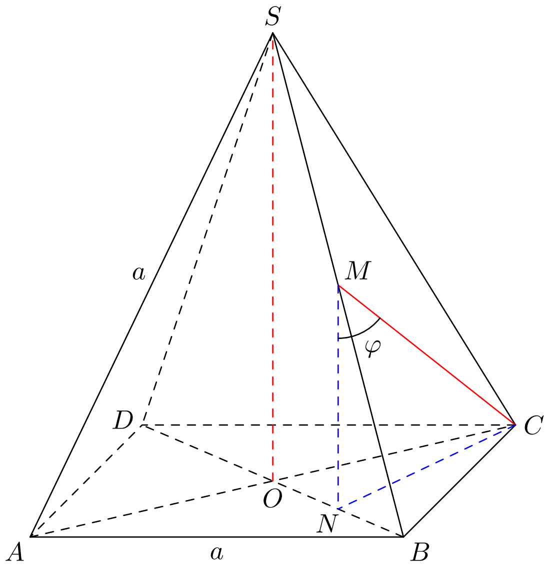


Рис. 27. К задаче 2

Поскольку SO перпендикулярна плоскости основания, MN также перпендикулярна этой плоскости. Стало быть, треугольник CMN — прямоугольный с гипотенузой CM.

Пусть каждое ребро пирамиды равно a. Длину отрезка CM найдём из равностороннего треугольника BCS (рис. 28).

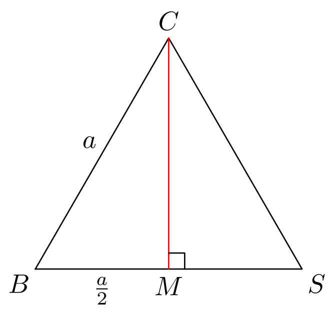


Рис. 28. К задаче 2

По теореме Пифагора имеем:

$$CM^2 = BC^2 - BM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}\,,$$

откуда

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}\,.$$

Обязательно запомните это выражение для высоты равностороннего треугольника со стороной a. Оно вам ещё неоднократно пригодится.

Для диагонали квадрата $ABCD$ имеем: $BD = a\sqrt{2}$ (почему?). Треугольник ASC равен треугольнику ABC (по трём сторонам), то есть является равнобедренным прямоугольным. Тогда

$$SO = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,.$$

Следовательно,

$$MN = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}\,.$$

Из треугольника CMN теперь имеем:

$$\cos\varphi = \frac{MN}{CM} = \frac{a\sqrt{2}/4}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Задача 3. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — середина BD, точка M — середина BC. Найдите угол между прямыми AK и DM.

Решение. Пусть точка L — середина BM (рис. 29). Тогда KL — средняя линия треугольника BDM; значит, $KL \parallel DM$, и потому искомый угол есть $\varphi = \angle AKL$.

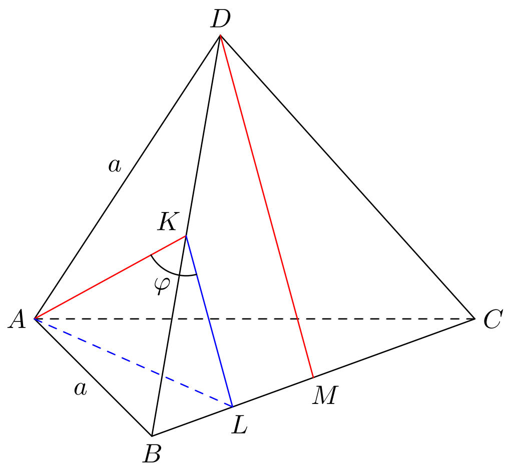


Рис. 29. К задаче 3

Величину φ мы вычислим по теореме косинусов из треугольника AKL. Предварительно найдём стороны этого треугольника.

Как и в предыдущей задаче, имеем:

$$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}\,,$$

где a — ребро тетраэдра. Кроме того,

$$KL = \frac{1}{2}DM = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}\,.$$

Остаётся найти сторону AL. Это можно сделать из треугольника ABL, в котором $AB = a$, $BL = a/4$, $\angle ABL = 60°$. По теореме косинусов получим:

$$AL^2 = a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - 2a\cdot\frac{a}{4}\cos 60° = a^2 + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{16}\,.$$

Теперь возвращаемся к треугольнику AKL. По теореме косинусов:

$$AL^2 = AK^2 + KL^2 - 2 \cdot AK \cdot KL \cos\varphi.$$

Подставляем сюда найденные длины сторон:

$$\frac{13a^2}{16} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 - 2\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}\cos\varphi.$$

Остаётся довести выкладки до конца:

$$\frac{13a^2}{16} = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16} - \frac{3a^2}{4}\cos\varphi = \frac{15a^2}{16} - \frac{3a^2}{4}\cos\varphi,$$

откуда находим:

$$\cos\varphi = \frac{1}{6}\,.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$.

5 Взаимное расположение прямой и плоскости

Возможны три варианта взаимного расположения прямой и плоскости (рис. 30).

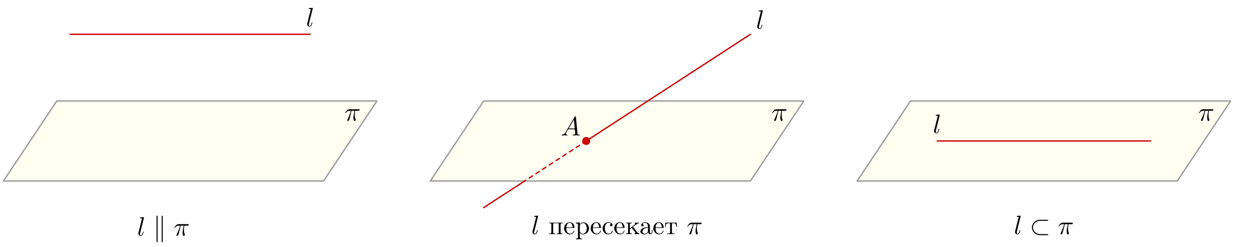


Рис. 30. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Прямая *параллельна* плоскости, если она не имеет с плоскостью общих точек. На левом рисунке прямая l параллельна плоскости π.

2. Прямая *пересекает* плоскость, если она имеет с плоскостью ровно одну общую точку. На рисунке в центре прямая l пересекает плоскость π в точке A.

3. Прямая *лежит* в плоскости, если каждая точка прямой принадлежит этой плоскости. На правом рисунке прямая l лежит в плоскости π. В таком случае говорят ещё, что плоскость π *проходит* через прямую l.

5.1 Параллельность прямой и плоскости

Как распознать случай параллельности прямой и плоскости? Для этого имеется замечательно простое утверждение.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая l параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то прямая l параллельна этой плоскости.

Давайте посмотрим, как работает этот признак. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, в которой проведена плоскость A_1BC (рис. 31).

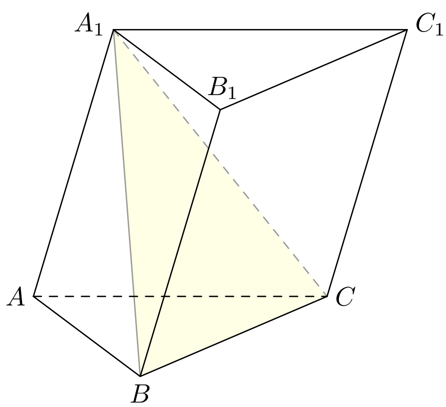


Рис. 31. Прямая B_1C_1 параллельна плоскости A_1BC

Поскольку боковые грани призмы являются параллелограммами, имеем $B_1C_1 \parallel BC$. Но прямая BC лежит в плоскости A_1BC. Поэтому в силу признака параллельности прямой и плоскости мы заключаем, что прямая B_1C_1 параллельна плоскости A_1BC.

Другое важное утверждение, которое нередко используется в задачах, — это теорема о пересечении двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости.

Теорема. Пусть прямая l параллельна плоскости π. Если плоскость σ проходит через прямую l и пересекает плоскость π по прямой m, то $m \parallel l$ (рис. 32).

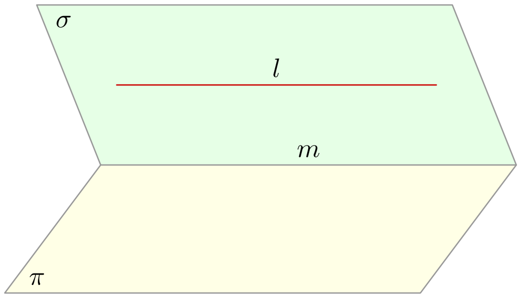


Рис. 32. К теореме

Мы не будем доказывать эту теорему: она содержится в школьной программе, и на экзамене никто не потребует от вас её доказательства. Лучше посмотрим, как это теорема используется в конкретной ситуации.

Задача. В правильной четырёхугольной пирамиде $ABCDS$ (с вершиной S) точка M — середина ребра SC. Постройте сечение пирамиды плоскостью ABM.

Решение. Сечение изображено на рис. 33.

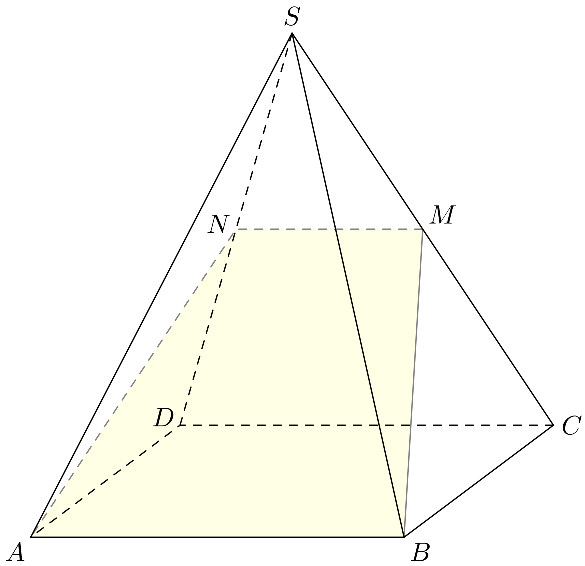


Рис. 33. К задаче

Самое главное тут — выяснить, по какой прямой секущая плоскость ABM пересекает плоскость SCD. Для этого заметим, что $AB \parallel CD$, и по признаку параллельности прямой и плоскости имеем $AB \parallel SCD$. А из теоремы следует тогда, что прямая MN пересечения плоскостей ABM и SCD параллельна прямой AB (и, стало быть, прямой CD).

Таким образом, MN — средняя линия треугольника SCD. Сечением пирамиды будет трапеция $ABMN$.

5.2 Перпендикулярность прямой и плоскости

Важным частным случаем пересечения прямой и плоскости является их *перпендикулярность*. Интуитивно вам совершенно ясно, что значит «прямая перпендикулярна плоскости», но определение нужно знать обязательно.

Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Предположим, в конкретной задаче нам хочется доказать, что прямая l перпендикулярна плоскости π. Как действовать? Не будем же мы перебирать *все* прямые, лежащие в плоскости π! К счастью, это и не нужно. Оказывается, достаточно предъявить две пересекающиеся прямые плоскости π, перпендикулярные прямой l.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Давайте смотреть, как работает этот признак.

Задача. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильная треугольная пирамида (рис. 34). Докажем, например, что $AD \perp BC$.

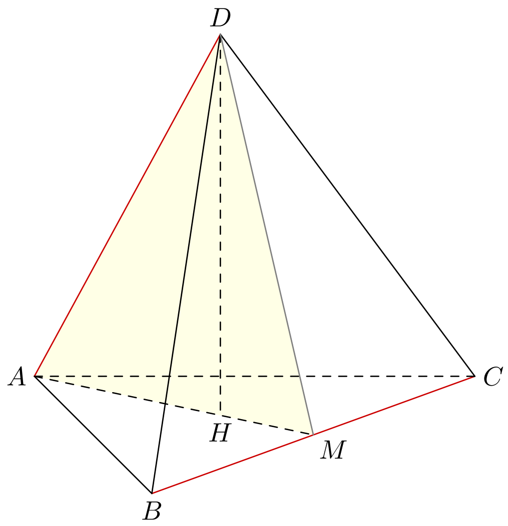


Рис. 34. К задаче

Пусть точка M — середина ребра BC. Рассмотрим плоскость ADM. Ясно, что высота DH нашей пирамиды лежит в этой плоскости (поскольку H лежит на медиане AM)[5].

Докажем, что прямая BC перпендикулярна плоскости ADM. Для этого нам нужно предъявить две пересекающие прямые, лежащие в плоскости ADM и перпендикулярные BC. Какие же это прямые?

Во-первых, это прямая DH. В самом деле, будучи высотой пирамиды, DH перпендикулярна плоскости ABC. По определению это означает, что DH перпендикулярна *любой* прямой, лежащей в плоскости ABC — в частности, прямой BC.

Во-вторых, это прямая AM. Действительно, будучи медианой равностороннего треугольника ABC, отрезок AM является его высотой и потому перпендикулярен BC.

[5]Здесь молчаливо используется одно из базовых утверждений стереометрии, которое часто принимается в качестве аксиомы: *если прямая проходит через две точки плоскости, то она лежит в этой плоскости.* В нашем случае точки D и H лежат в плоскости ADM — стало быть, и прямая DH лежит в данной плоскости.

Итак, мы убедились, что $BC \perp DH$ и $BC \perp AM$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости мы заключаем, что $BC \perp ADM$. Стало быть, BC перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ADM — в частности, прямой AD. Это мы и хотели доказать.

Обратите внимание, какая схема рассуждений реализована в данной задаче. Допустим, мы хотим доказать, что прямая l перпендикулярна прямой m. Действуем следующим образом.

1. Берём подходящую плоскость π, в которой лежит прямая l.

2. В плоскости π находим две пересекающиеся прямые a и b, такие, что $m \perp a$ и $m \perp b$.

3. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости делаем вывод, что $m \perp \pi$.

4. По определению перпендикулярности прямой и плоскости заключаем, что прямая m перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости π. В частности, $m \perp l$, что и требовалось.

Запомните эту схему — она часто работает в экзаменационных задачах. Следующий раздел посвящён важному применению этой схемы — теореме о трёх перпендикулярах.

6 Теорема о трёх перпендикулярах

В конце предыдущего раздела мы описали схему рассуждений, которая применяется для доказательства перпендикулярности прямых. На этой схеме, в частности, основана *теорема о трёх перпендикулярах*.

Прежде чем формулировать саму теорему, необходимо ввести некоторую стандартную терминологию.

6.1 Перпендикуляр и наклонная

Рассмотрим плоскость π и точку M, не принадлежащую этой плоскости. Из точки M проведём прямую, перпендикулярную плоскости π и пересекающую её в точке N (рис. 35).

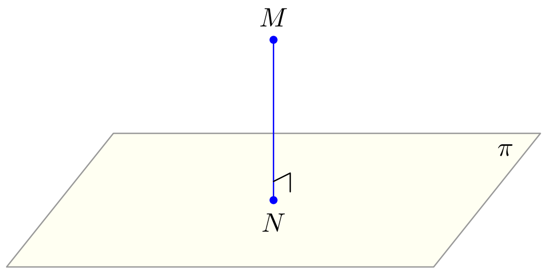


Рис. 35. Перпендикуляр

Отрезок MN называется *перпендикуляром*, проведённым из точки M к плоскости π. Точка N называется *основанием* этого перпендикуляра.

С понятием перпендикуляра мы уже встречались ранее. Например, высота пирамиды — это перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания.

Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна этой плоскости, то такая прямая называется *наклонной*. На рис. 36 мы видим наклонную l, пересекающую плоскость π в точке A.

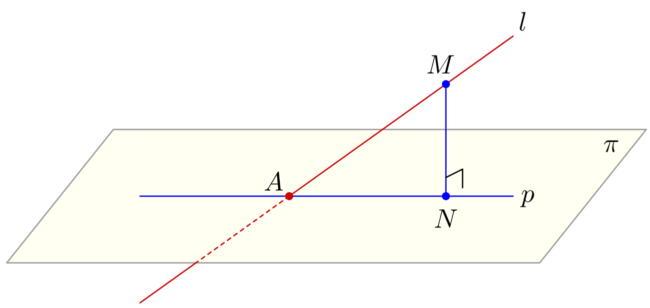


Рис. 36. Наклонная и проекция наклонной

Возьмём произвольную точку M прямой l, не лежащую в плоскости π, и проведём перпендикуляр MN к этой плоскости. Соединив точку A с основанием N проведённого перпендикуляра, получим прямую p, лежащую в плоскости π. Прямая p называется *проекцией наклонной* l на плоскость π.

Не будет ли прямая p менять своё положение, если M перемещается по прямой l? К счастью, нет. Можно показать, что основания N *всех* перпендикуляров MN будут лежать на *одной и той же* прямой p. Таким образом, понятие проекции наклонной определено корректно: оно не зависит от конкретного выбора точки M.

6.2 Формулировка и доказательство теоремы

Теорема о трёх перпендикулярах. Прямая на плоскости перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной.

Мы видим данную ситуацию на рис. 37. Прямая m лежит в плоскости π, прямая l — это наклонная, p — проекция наклонной.

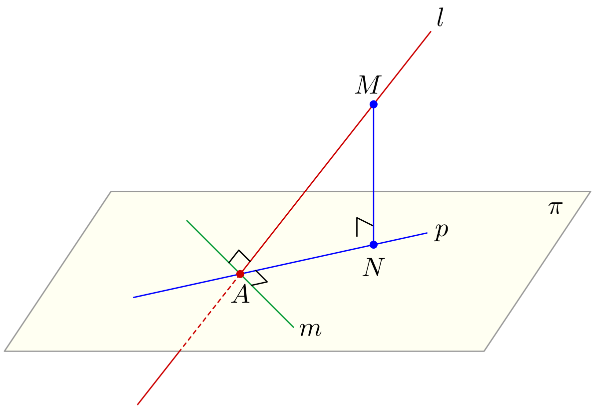


Рис. 37. $m \perp l \Leftrightarrow m \perp p$

Обратите внимание на выражение «тогда и только тогда» в формулировке теоремы[6]. Оно означает, что справедливы *два* утверждения.

1. *Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна проекции наклонной.* Символически: $m \perp l \Rightarrow m \perp p$.

2. *Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна наклонной.* Символически: $m \perp p \Rightarrow m \perp l$.

Данные утверждения являются обратными друг к другу: они отличаются только направлением стрелки логического следования. Можно объединить эти утверждения, используя двустороннюю стрелку: $m \perp l \Leftrightarrow m \perp p$.

Доказательство теоремы. Нам нужно доказать два утверждения, сформулированные выше под пунктами 1 и 2. Снова обращаемся к рис. 37.

1. Предположим сначала, что прямая на плоскости перпендикулярна наклонной: $m \perp l$. Поскольку MN — перпендикуляр к плоскости π, прямая MN перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости — в частности, прямой m.

   Таким образом, прямая m перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости AMN (а именно, прямым l и MN). Согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая m перпендикулярна плоскости AMN. Тогда m перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости AMN — в частности, прямой p. Первое утверждение тем самым доказано.

2. Наоборот, пусть прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной: $m \perp p$. Как мы уже видели выше, $m \perp MN$. Снова прямая m оказывается перпендикулярной двум пересекающимся прямым плоскости AMN (на сей раз это p и MN), так что $m \perp AMN$. Тогда m перпендикулярна любой прямой плоскости AMN — в частности, прямой l. Тем самым доказано второе утверждение и вся теорема.

[6]Синонимы этого выражения: *если и только если*, *в том и только в том случае*, *необходимо и достаточно*, *равносильно*, *эквивалентно*.

Как видите, вышеупомянутая схема доказательства перпендикулярности прямых (а именно, чтобы доказать перпендикулярность двух прямых, мы доказываем, что одна прямая перпендикулярна плоскости, в которой лежит вторая прямая) «упакована» внутри доказательства данной теоремы. Поэтому зачастую достаточно сослаться на теорему о трёх перпендикулярах, не воспроизводя каждый раз саму схему. Но, тем не менее, схему эту вы должны чётко знать!

Рассмотрим ещё раз задачу из предыдущей статьи.

Задача. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильная треугольная пирамида. Докажем, что прямая AD перпендикулярна BC (рис. 38).

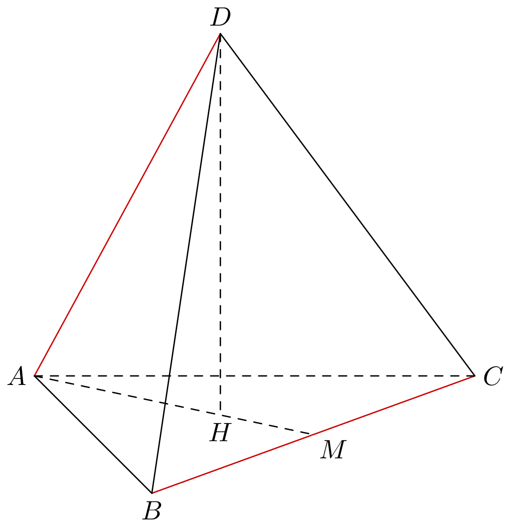


Рис. 38. К задаче

Прямая AD является наклонной к плоскости ABC. Поскольку основание H высоты пирамиды DH лежит на медиане AM треугольника ABC, проекцией наклонной AD на плоскость ABC служит прямая AM.

Прямая BC лежит в плоскости ABC и перпендикулярна проекции наклонной: $BC \perp AM$ (ибо AM есть также и высота равностороннего треугольника ABC). По теореме о трёх перпендикулярах прямая BC перпендикулярна наклонной: $BC \perp AD$.

Другие примеры использования теоремы о трёх перпендикулярах нам ещё неоднократно встретятся при разборе задач.

7 Угол между прямой и плоскостью

Понятие угла между прямой и плоскостью можно ввести для любого взаимного расположения прямой и плоскости.

- Если прямая l перпендикулярна плоскости π, то угол между l и π считается равным $90°$.
- Если прямая l параллельна плоскости π или лежит в этой плоскости, то угол между l и π считается равным нулю.
- Если прямая l является наклонной к плоскости π, то угол между l и π — это угол φ между прямой l и её проекцией p на плоскость π (рис. 39).

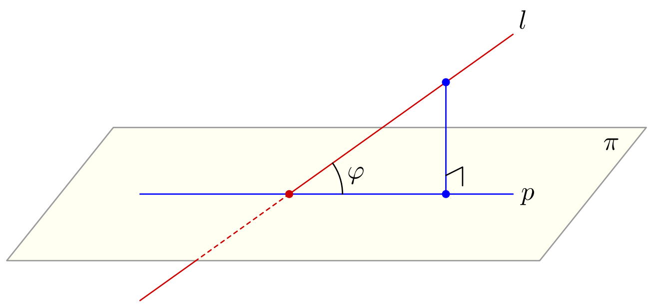


Рис. 39. Угол между прямой и плоскостью

Итак, запомним определение для этого нетривиального случая: если прямая является наклонной, то **угол между прямой и плоскостью есть угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость**.

7.1 Примеры решения задач

Разберём три задачи, расположенные по возрастанию сложности. Третья задача — уровень С2 на ЕГЭ по математике.

Задача 1. В правильном тетраэдре найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром a (рис. 40). Найдём угол между AD и плоскостью ABC.

Проведём высоту DH. Проекцией прямой AD на плоскость ABC служит прямая AH. Поэтому искомый угол φ есть угол между прямыми AD и AH.

Отрезок AH есть радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC:

$$AH = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Теперь из прямоугольного треугольника ADH:

$$\cos\varphi = \frac{AH}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

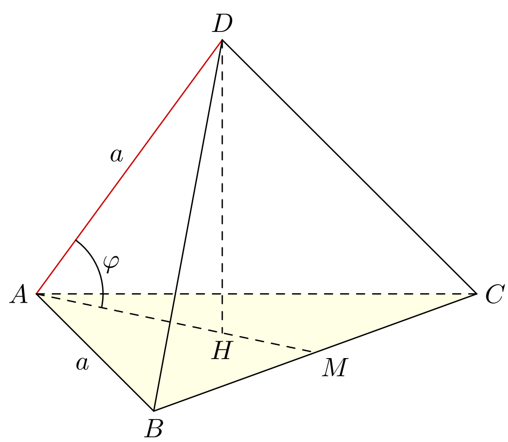


Рис. 40. К задаче 1

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно стороне основания. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1.

Решение. Угол между прямой и плоскостью не изменится при параллельном сдвиге прямой. Поскольку CC_1 параллельна AA_1, искомый угол φ есть угол между прямой CC_1 и плоскостью ABC_1 (рис. 41).

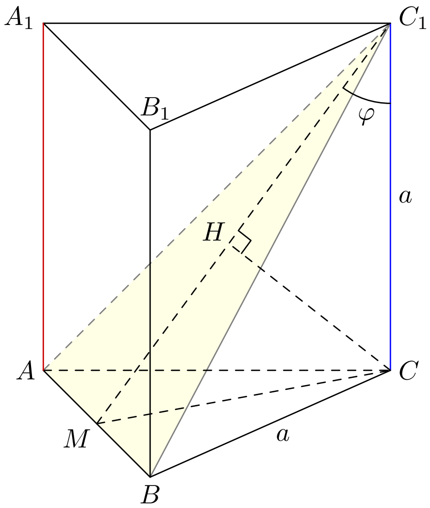


Рис. 41. К задаче 2

Пусть M — середина AB. Проведём высоту CH в треугольнике CC_1M. Покажем, что CH — перпендикуляр к плоскости ABC_1. Для этого нужно предъявить две пересекающиеся прямые этой плоскости, перпендикулярные CH.

Первая прямая очевидна — это C_1M. В самом деле, $CH \perp C_1M$ по построению.

Вторая прямая — это AB. Действительно, проекцией наклонной CH на плоскость ABC служит прямая CM; при этом $AB \perp CM$. Из теоремы о трёх перпендикулярах следует тогда, что $AB \perp CH$.

Итак, $CH \perp ABC_1$. Стало быть, угол между CC_1 и ABC_1 есть $\varphi = \angle CC_1H$.

Величину CH найдём из соотношения

$$C_1M \cdot CH = CC_1 \cdot CM$$

(обе части этого соотношения равны удвоенной площади треугольника CC_1M). Имеем:

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad C_1M = \sqrt{CC_1^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Тогда

$$\frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot CH = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$CH = a\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Остаётся найти угол φ:

$$\sin\varphi = \frac{CH}{CC_1} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ: $\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Задача 3. На ребре A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K так, что $A_1K : KB_1 = 3 : 1$. Найдите угол между прямой AK и плоскостью BC_1D_1.

Решение. Сделав чертёж (рис. 42, слева), мы понимаем, что нужны дополнительные построения.

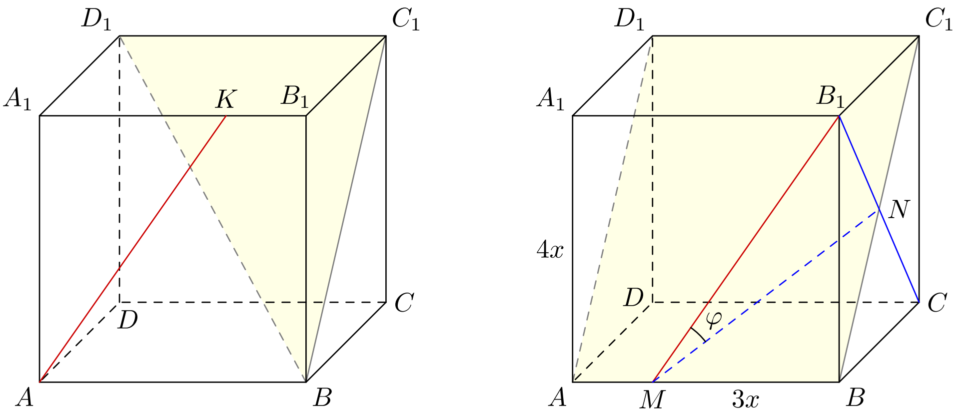


Рис. 42. К задаче 3

Во-первых, заметим, что прямая AB лежит в плоскости BC_1D_1 (поскольку $AB \parallel C_1D_1$). Во-вторых, проведём B_1M параллельно AK (рис. 42, справа). Проведём также B_1C, и пусть N есть точка пересечения B_1C и BC_1.

Покажем, что прямая B_1C перпендикулярна плоскости BC_1D_1. В самом деле:

1) $B_1C \perp BC_1$ (как диагонали квадрата);

2) $B_1C \perp AB$ по теореме о трёх перпендикулярах (ведь AB перпендикулярна прямой BC — проекции наклонной B_1C на плоскость ABC).

Таким образом, B_1C перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости BC_1D_1; следовательно, $B_1C \perp BC_1D_1$. Поэтому проекцией прямой MB_1 на плоскость BC_1D_1 служит прямая MN, и, стало быть, искомый угол есть $\varphi = \angle B_1MN$.

Пусть ребро куба равно $4x$. Тогда $MB = A_1K = 3x$. Из треугольника MBB_1 имеем:

$$B_1M = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x.$$

Далее,

$$B_1N = \frac{1}{2}B_1C = \frac{1}{2} \cdot 4x\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}.$$

Отсюда находим:

$$\sin\varphi = \frac{B_1N}{B_1M} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\,.$$

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

8 Взаимное расположение плоскостей

Две различные прямые на плоскости или параллельны, или пересекаются. Точно так же две различные плоскости в пространстве либо параллельны, либо пересекаются (рис. 43).

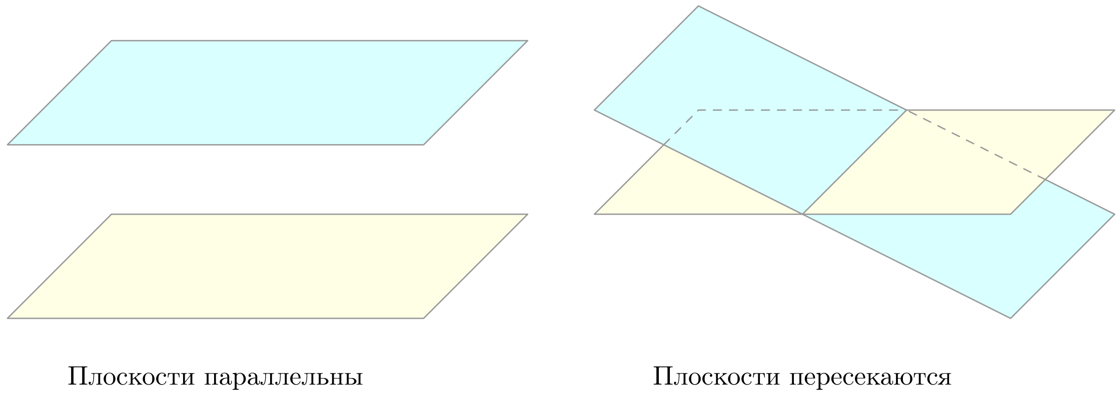


Рис. 43. Взаимное расположение плоскостей

8.1 Параллельность плоскостей

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Предположим, в некоторой задаче нам хотелось бы доказать, что некоторые плоскости параллельны. Как это сделать? Для такой цели имеется специальное утверждение.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Мы видим эту ситуацию на рис. 44. Именно, пусть пересекающиеся прямые a и b, лежащие в плоскости π, параллельны соответственно прямым a' и b', лежащим в плоскости σ. Тогда плоскость π параллельна плоскости σ.

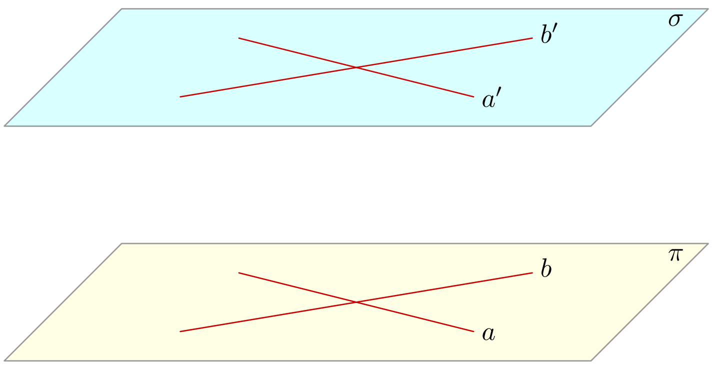


Рис. 44. Если $a \parallel a'$ и $b \parallel b'$, то $\pi \parallel \sigma$

Вопрос. Почему в формулировке признака параллельности плоскостей важно, что прямые *пересекающиеся*? Останется ли верным признак, если это слово убрать?

Доказывать признак параллельности плоскостей мы не будем — это теорема из школьной программы, на которую можно сослаться на экзамене. Давайте лучше посмотрим, как работает данный признак в конкретной задаче.

Задача. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости A_1BC_1 и ACD_1 параллельны.

Решение. Делаем чертёж (рис. 45).

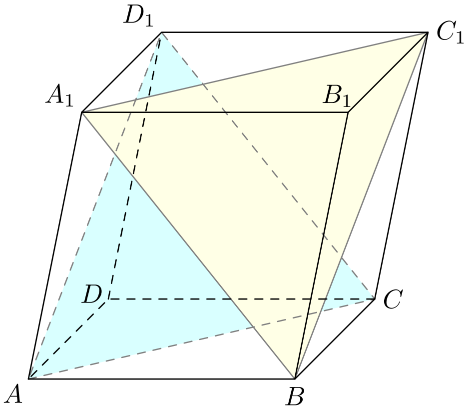


Рис. 45. К задаче

Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, поэтому $BC \parallel AD$ и $BC = AD$. Четырёхугольник ADD_1A_1 — также параллелограмм, поэтому $A_1D_1 \parallel AD$ и $A_1D_1 = AD$. Имеем, таким образом: $A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1 = BC$. Следовательно, четырёхугольник A_1BCD_1 является параллелограммом[7], и потому $A_1B \parallel D_1C$.

Аналогично докажем, что четырёхугольник ABC_1D_1 — параллелограмм, и, стало быть, $BC_1 \parallel AD_1$.

Мы получили, что две пересекающиеся прямые плоскости A_1BC_1 (а именно, A_1B и BC_1) соответственно параллельны двум прямым плоскости ACD_1 (а именно, прямым D_1C и AD_1). Следовательно, данные плоскости параллельны, что и требовалось.

Важное свойство параллельных плоскостей: *если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то прямые пересечения параллельны.*

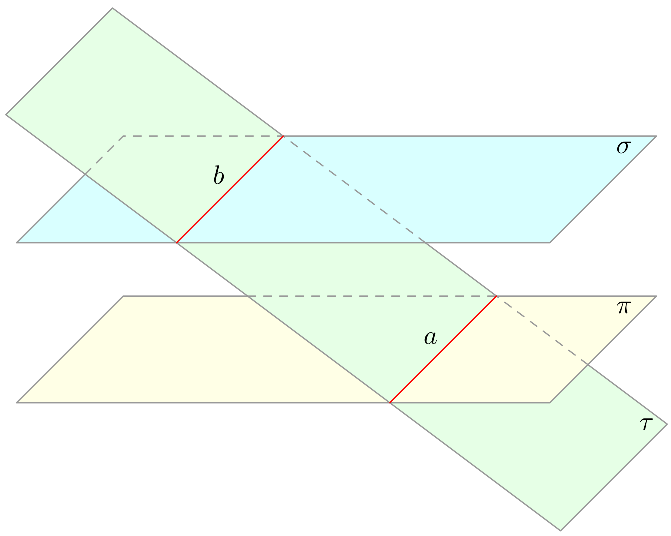


Рис. 46. Если $\pi \parallel \sigma$, то $a \parallel b$

Именно, пусть плоскость π параллельна плоскости σ (рис. 46). Если плоскость τ пересекает плоскость π по прямой a и пересекает плоскость σ по прямой b, то $a \parallel b$.

[7]Напомним соответствующий признак параллелограмма: *если в четырёхугольнике две стороны параллельны и равны, то такой четырёхугольник — параллелограмм.*

Задача. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Точка K — середина ребра A_1D_1. Найдите площадь сечения куба плоскостью ACK.

Решение. Секущая плоскость ACK пересекает плоскость ABC нижней грани куба по прямой AC (рис. 47). Плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна плоскости ABC; следовательно, секущая плоскость пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой KM, параллельной AC.

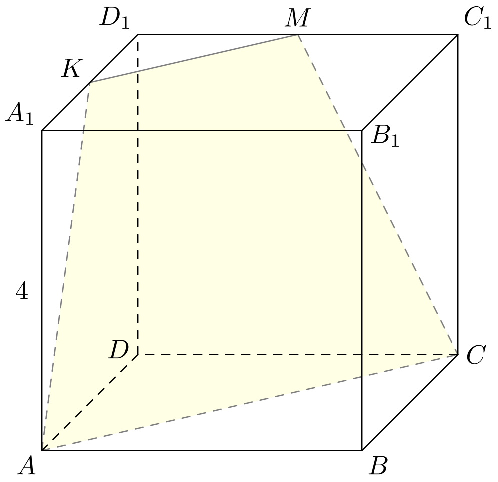


Рис. 47. К задаче

Плоскости ADD_1 и CDD_1 пересекаются секущей плоскостью по прямым AK и CM соответственно. Таким образом, сечение куба — трапеция $AKMC$, в которой

$$AC = 4\sqrt{2}, \quad AK = CM = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad KM = \frac{1}{2}A_1C_1 = 2\sqrt{2}.$$

Нарисуем эту трапецию отдельно (рис. 48). Проведём высоты KE и MF.

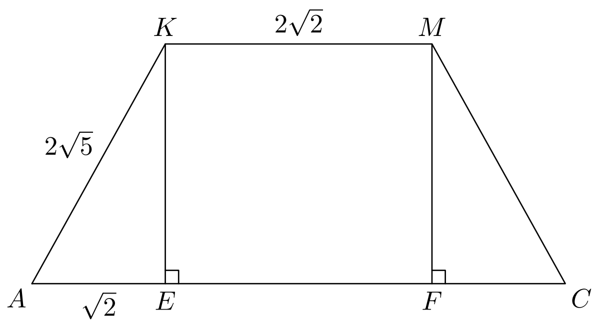


Рис. 48. Планиметрический чертёж сечения

Ясно, что

$$AE = CF = \frac{AC - KM}{2} = \sqrt{2}.$$

Тогда высота трапеции:

$$KE = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Остаётся найти площадь трапеции:

$$S = \frac{AC + KM}{2} \cdot KE = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18.$$

Ответ: 18.

8.2 Пересечение плоскостей

Выше мы неоднократно использовали утверждение о том, что одна плоскость пересекает другую по прямой. Это — одно из базовых утверждений стереометрии, которое нередко принимается в качестве аксиомы: *если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

Данное утверждение используется при построении сечений многогранников. Рассмотрим самый простой пример — сечение тетраэдра.

Задача. На рёбрах AB, BC и CD тетраэдра $ABCD$ расположены соответственно точки K, N и M, отличные от вершин тетраэдра (при этом прямые KN и AC не параллельны). Постройте сечение тетраэдра плоскостью KMN.

Решение. Сечение показано на рис. 49 — это четырёхугольник $KLMN$. Объясним, как выполнено построение.

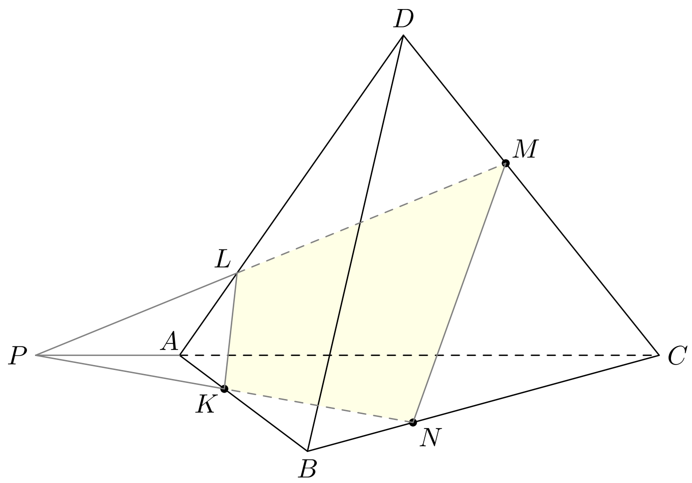


Рис. 49. Сечение тетраэдра

Грани ABC и BCD пересекаются секущей плоскостью KMN по отрезкам KN и MN соответственно.

Пересечением секущей плоскости и плоскости ABC служит прямая KN, которая пересекает прямую AC в точке P. Таким образом, точка P принадлежит одновременно секущей плоскости и плоскости ACD.

Точка M также является общей точкой секущей плоскости и плоскости ACD. Значит, секущая плоскость пересекает плоскость ACD по прямой PM.

Прямая PM пересекает AD в точке L. Остаётся провести KL и LM. В результате получается четырёхугольник $KLMN$, который и является искомым сечением.

9 Угол между плоскостями

Величину угла между двумя различными плоскостями можно определить для любого взаимного расположения плоскостей.

Тривиальный случай — если плоскости параллельны. Тогда угол между ними считается равным нулю.

Нетривиальный случай — если плоскости пересекаются. Этому случаю и посвящено дальнейшее обсуждение. Сначала нам понадобится понятие двугранного угла.

9.1 Двугранный угол

Двугранный угол — это две полуплоскости с общей прямой (которая называется *ребром* двугранного угла). На рис. 50 изображён двугранный угол, образованный полуплоскостями π и σ; ребром этого двугранного угла служит прямая a, общая для данных полуплоскостей.

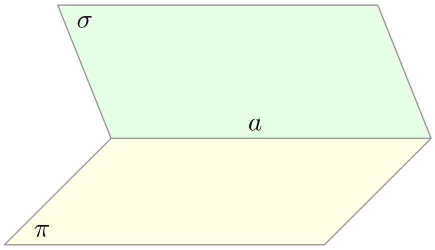


Рис. 50. Двугранный угол

Двугранный угол можно измерять в градусах или радианах — словом, ввести угловую величину двугранного угла. Делается это следующим образом.

На ребре двугранного угла, образованного полуплоскостями π и σ, возьмём произвольную точку M. Проведём лучи MA и MB, лежащие соответственно в данных полуплоскостях и перпендикулярные ребру (рис. 51).

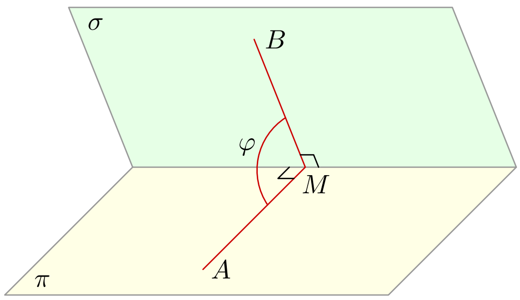


Рис. 51. Линейный угол двугранного угла

Полученный угол AMB — это *линейный угол двугранного угла*. Угол $\varphi = \angle AMB$ как раз и является угловой величиной нашего двугранного угла.

Определение. Угловая величина двугранного угла — это величина линейного угла данного двугранного угла.

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу (ведь они получаются друг из друга параллельным сдвигом). Поэтому данное определение корректно: величина φ не зависит от конкретного выбора точки M на ребре двугранного угла.

9.2 Определение угла между плоскостями

При пересечении двух плоскостей получаются четыре двугранных угла. Если все они имеют одинаковую величину (по 90°), то плоскости называются *перпендикулярными*; угол между плоскостями тогда равен 90°.

Если не все двугранные углы одинаковы (то есть имеются два острых и два тупых), то углом между плоскостями называется величина *острого* двугранного угла (рис. 52).

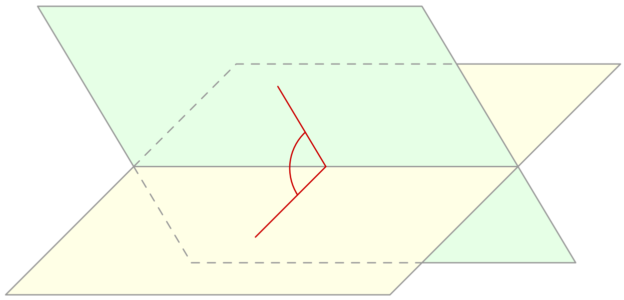


Рис. 52. Угол между плоскостями

9.3 Примеры решения задач

Разберём три задачи. Первая — простая, вторая и третья — примерно на уровне С2 на ЕГЭ по математике.

Задача 1. Найдите угол между двумя гранями правильного тетраэдра.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Проведём медианы AM и DM соответствующих граней, а также высоту тетраэдра DH (рис. 53).

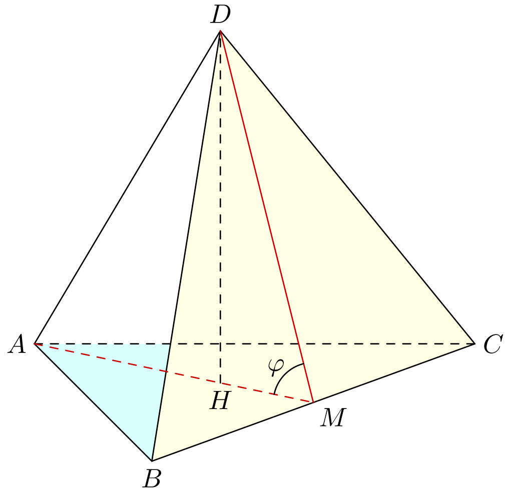


Рис. 53. К задаче 1

Будучи медианами, AM и DM являются также высотами равносторонних треугольников ABC и DBC. Поэтому угол $\varphi = \angle AMD$ есть линейный угол двугранного угла, образованного гранями ABC и DBC. Находим его из треугольника DHM:

$$\cos\varphi = \frac{HM}{DM} = \frac{\frac{1}{3}AM}{DM} = \frac{1}{3}\,.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Задача 2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) боковое ребро равно стороне основания. Точка K — середина ребра SA. Найдите угол между плоскостями KBC и ABC.

Решение. Прямая BC параллельна AD и тем самым параллельна плоскости ADS. Поэтому плоскость KBC пересекает плоскость ADS по прямой KL, параллельной BC (рис. 54).

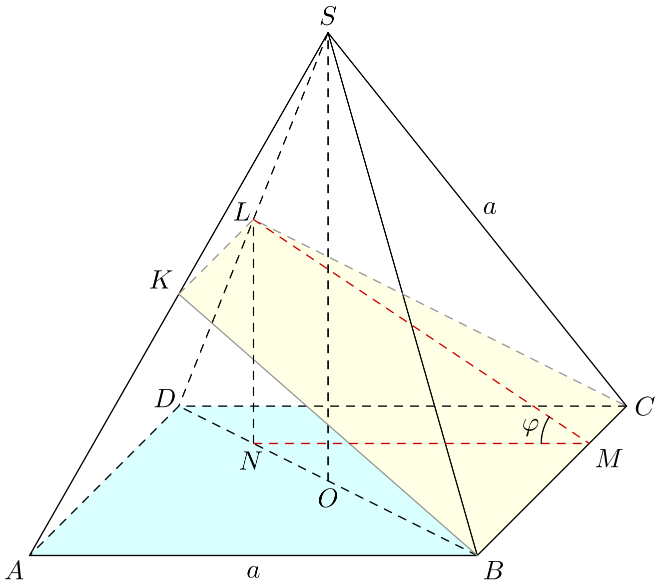


Рис. 54. К задаче 2

При этом KL будет также параллельна прямой AD; следовательно, KL — средняя линия треугольника ADS, и точка L — середина DS.

Проведём высоту пирамиды SO. Пусть N — середина DO. Тогда LN — средняя линия треугольника DOS, и потому $LN \parallel SO$. Значит, LN — перпендикуляр к плоскости ABC.

Из точки N опустим перпендикуляр NM на прямую BC. Прямая NM будет проекцией наклонной LM на плоскость ABC. Из теоремы о трёх перпендикулярах следует тогда, что LM также перпендикулярна BC.

Таким образом, угол $\varphi = \angle LMN$ является линейным углом двугранного угла, образованного полуплоскостями KBC и ABC. Будем искать этот угол из прямоугольного треугольника LMN.

Пусть ребро пирамиды равно a. Сначала находим высоту пирамиды:

$$SO = \sqrt{DS^2 - DO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,.$$

Тогда

$$LN = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}\,.$$

Далее, треугольник BMN подобен треугольнику BCD и $BN : BD = 3 : 4$. Стало быть,

$$MN = \frac{3}{4}CD = \frac{3a}{4}\,.$$

Теперь находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{LN}{MN} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно стороне основания. Точка K — середина ребра BB_1. Найдите угол между плоскостями A_1KC и ABC.

Решение. Пусть L — точка пересечения прямых A_1K и AB. Тогда плоскость A_1KC пересекает плоскость ABC по прямой CL (рис. 55).

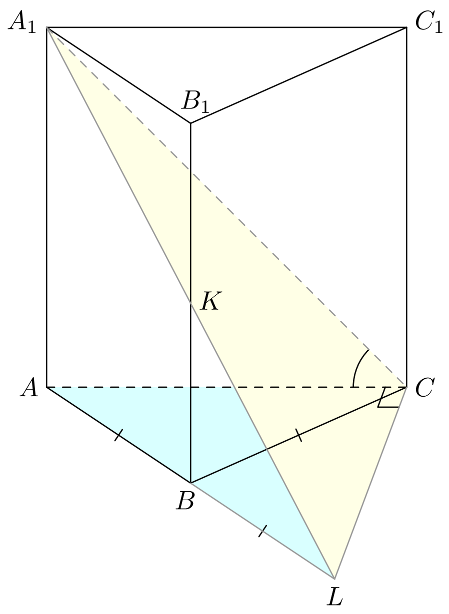


Рис. 55. К задаче 3

Треугольники A_1B_1K и KBL равны по катету и острому углу. Следовательно, равны и другие катеты: $A_1B_1 = BL$.

Рассмотрим треугольник ACL. В нём $BA = BC = BL$. Угол CBL равен $120°$; стало быть, $\angle BCL = 30°$. Кроме того, $\angle BCA = 60°$. Поэтому $\angle ACL = \angle BCA + \angle BCL = 90°$.

Итак, $LC \perp AC$. Но прямая AC служит проекцией прямой A_1C на плоскость ABC. По теореме о трёх перпендикулярах заключаем тогда, что $LC \perp A_1C$.

Таким образом, угол A_1CA — линейный угол двугранного угла, образованного полуплоскостями A_1KC и ABC. Это и есть искомый угол. Из равнобедренного прямоугольного треугольника A_1AC мы видим, что он равен $45°$.

Ответ: $45°$

10 Расстояние от точки до прямой

Если точка не лежит на прямой, то *расстояние от точки до прямой* — это длина перпендикуляра, проведённого из точки на данную прямую. На рис. 56 показано расстояние d от точки M до прямой l.

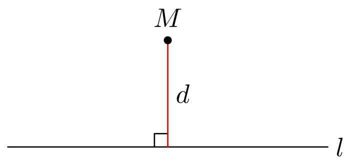


Рис. 56. Расстояние от точки до прямой

Если точка лежит на прямой, то расстояние от точки до прямой считается равным нулю.

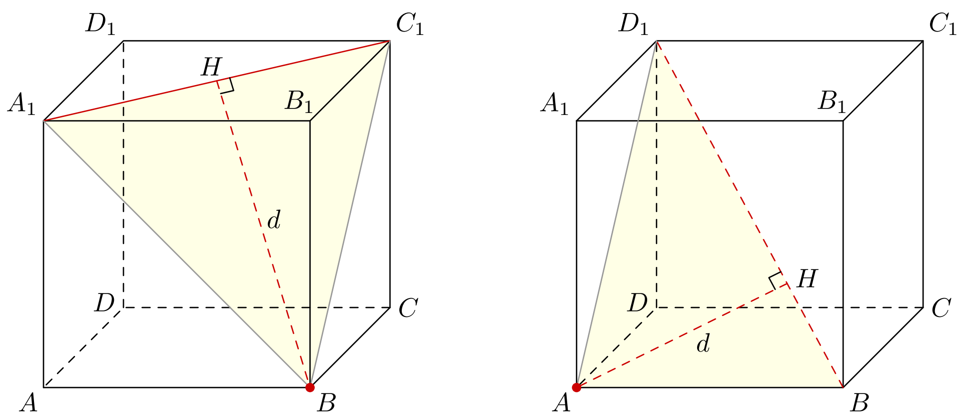
В конкретных задачах вычисление расстояния от точки до прямой сводится к нахождению высоты какой-либо подходящей планиметрической фигуры — треугольника, параллелограмма или трапеции.

10.1 Примеры решения задач

Разберём три задачи. Первая задача — простая, а вторая и третья примерно соответствуют уровню задачи №16 на ЕГЭ по математике.

Задача 1. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние: а) от точки B до прямой A_1C_1; б) от точки A до прямой BD_1.

Решение. Обе ситуации изображены на рис. 57.



К пункту а) К пункту б)

Рис. 57. К задаче 1

а) Искомое расстояние d есть высота BH треугольника BA_1C_1. Данный треугольник равносторонний — все его стороны, будучи диагоналями граней, равны $\sqrt{2}$. Следовательно,

$$d = BH = BA_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\,.$$

б) Искомое расстояние d есть высота AH треугольника ABD_1. Данный треугольник прямоугольный. Действительно, прямая AB перпендикулярна плоскости ADD_1 и поэтому перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости — в частности, прямой AD_1.

Имеем: $AB = 1$, $AD_1 = \sqrt{2}$, $BD_1 = \sqrt{3}$. Если S — площадь треугольника ABD_1, то:

$$2S = AB \cdot AD_1 = BD_1 \cdot d.$$

Отсюда

$$d = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задача 2. Треугольник со сторонами $AB = 3$, $AC = 3$, $BC = 2$ является основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро призмы равно 2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1.

Решение. Искомое расстояние d есть высота A_1H треугольника A_1BC_1 (рис. 58).

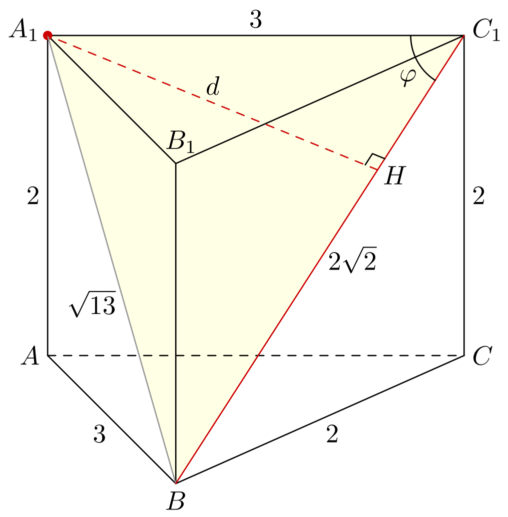


Рис. 58. К задаче 2

По теореме Пифагора легко находим: $A_1B = \sqrt{13}$, $BC_1 = 2\sqrt{2}$. Таким образом, нам требуется найти высоту треугольника, в котором известны три стороны. Можно действовать по-разному; вот один из наиболее простых в данном случае путей.

Пусть $\varphi = \angle A_1C_1B$. Запишем теорему косинусов для стороны A_1B треугольника A_1BC_1:

$$13 = 9 + 8 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

и

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{34}}{6}.$$

Тогда из прямоугольного треугольника A_1C_1H получаем:

$$d = 3\sin\varphi = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

Задача 3. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит трапеция с основаниями $AD = 3$, $BC = 1$ и боковыми сторонами $AB = CD = 2$. Боковое ребро призмы равно 2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC.

Решение. Искомое расстояние d есть длина перпендикуляра A_1M, опущенного на прямую BC. Поскольку $A_1D_1 \parallel BC$, это расстояние равно также высоте BH трапеции A_1BCD_1 (рис. 59).

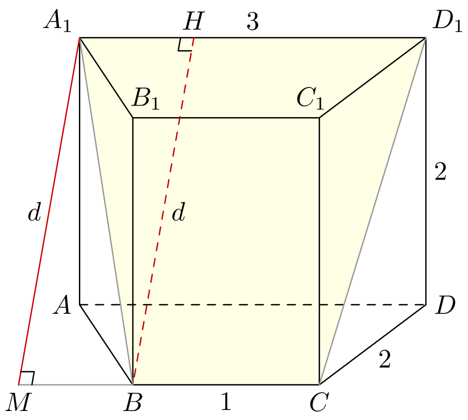


Рис. 59. К задаче 3

Боковая сторона данной трапеции: $A_1B = 2\sqrt{2}$. Нарисуем эту трапецию отдельно (рис. 60):

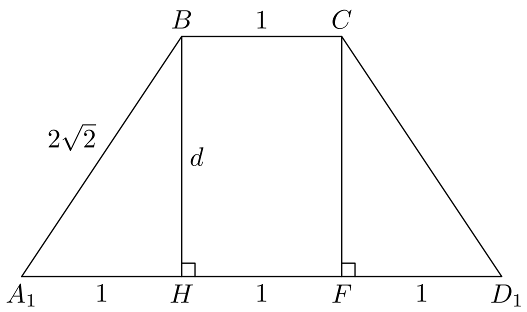


Рис. 60. Планиметрический чертёж

Легко находим:

$$A_1H = \frac{A_1D_1 - BC}{2} = 1,$$

и тогда

$$d = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{7}.$$

Ответ: $\sqrt{7}$.

11 Расстояние от точки до плоскости

Если точка не принадлежит плоскости, то *расстояние от точки до плоскости* — это длина перпендикуляра, проведённого из точки на данную плоскость. На рис. 61 показано расстояние d от точки M до плоскости π.

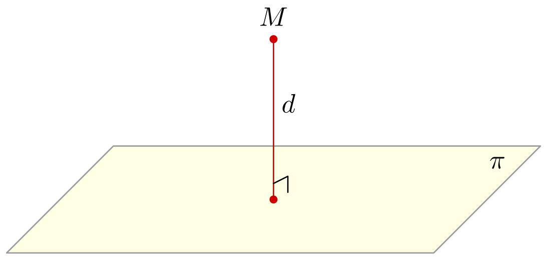


Рис. 61. Расстояние от точки до плоскости

Если точка принадлежит плоскости, то расстояние от точки до плоскости равно нулю.

11.1 Примеры решения задач

Разберём четыре задачи. В них мы проиллюстрируем основные идеи, встречающиеся на ЕГЭ по математике в задачах №16, где требуется найти расстояние от точки до плоскости.

Задача 1. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 2. В пространстве взята точка D такая, что $AD = BD = 2$, $CD = 1$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.

Решение. Искомое расстояние — это высота пирамиды $ABCD$, проведённая из точки D.

Пусть M — середина AB. Проведём перпендикуляр DH на прямую CM (рис. 62). Покажем, что DH будет высотой нашей пирамиды.

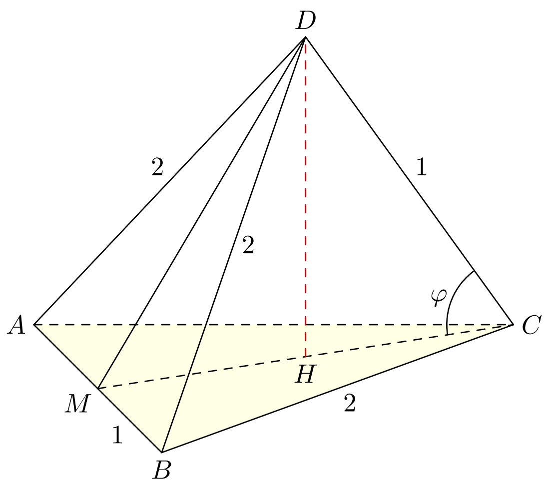


Рис. 62. К задаче 1

Поскольку медиана CM является высотой треугольника ABC, имеем $AB \perp CM$. Точно так же $AB \perp DM$ (ведь треугольник ABD тоже равносторонний). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости получаем, что AB перпендикулярна плоскости MDC. Значит, AB перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости — в частности, прямой DH.

Итак, $DH \perp CM$ (по построению) и $DH \perp AB$. Отсюда получаем $DH \perp ABC$, что мы и хотели.

Из треугольников BCM и BDM легко находим: $CM = DM = \sqrt{3}$. Теперь запишем теорему косинусов для стороны DM треугольника DMC:

$$3 = 1 + 3 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cos\varphi$$

(здесь $\varphi = \angle DCM$). Отсюда $\cos\varphi = \sqrt{3}/6$, $\sin\varphi = \sqrt{33}/6$ и

$$DH = 1 \cdot \sin\varphi = \frac{\sqrt{33}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{33}}{6}$.

Задача 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 1. Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости ABC_1.

Решение. Поскольку $A_1B_1 \parallel AB$, прямая A_1B_1 параллельна плоскости ABC_1. Следовательно, искомое расстояние d есть расстояние от *любой* точки прямой A_1B_1 до плоскости ABC_1 (ведь все эти расстояния равны друг другу). Поэтому мы можем выбрать наиболее удобную точку на прямой A_1B_1. Это, несомненно, точка N — середина отрезка A_1B_1 (рис. 63).

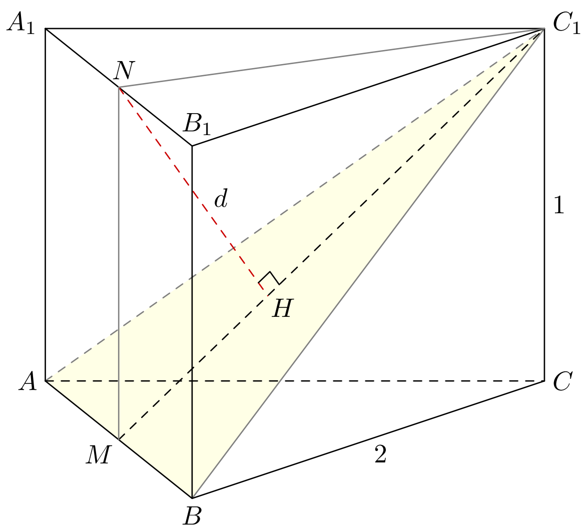


Рис. 63. К задаче 2

Пусть M — середина AB. Проведём NH перпендикулярно C_1M. Покажем, что $NH \perp ABC_1$.

В равнобедренном треугольнике ABC_1 медиана C_1M является одновременно высотой, так что $AB \perp C_1M$. Кроме того, $AB \perp MN$, так как призма прямая. Следовательно, прямая AB перпендикулярна плоскости C_1MN — и, в частности, прямой NH, лежащей в этой плоскости.

Итак, $NH \perp C_1M$ (по построению) и $NH \perp AB$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая NH перпендикулярна плоскости ABC_1, что мы и хотели показать. Стало быть, искомое расстояние d равно длине отрезка NH.

Дальше несложно. Имеем: $MN = 1$, $C_1N = \sqrt{3}$ и

$$C_1M = \sqrt{C_1N^2 + MN^2} = 2,$$

откуда

$$d = \frac{C_1N \cdot MN}{C_1M} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Повторим ключевую идею данной задачи: *от исходной точки B_1 перейти к другой точке, находящейся на таком же расстоянии от плоскости ABC_1, но более удобной для вычислений.* В приведённом решении мы из точки B_1 сместились параллельно плоскости в точку N.

Возможен и другой вариант смещения, который также может оказаться полезным при решении задач. Он основан на следующем простом факте:

- *если плоскость проходит через середину отрезка, то концы отрезка равноудалены от данной плоскости.*

Так, на рис. 64 мы видим плоскость π, проходящую через середину K отрезка PQ. Проведём перпендикуляры PA и QB на данную плоскость.

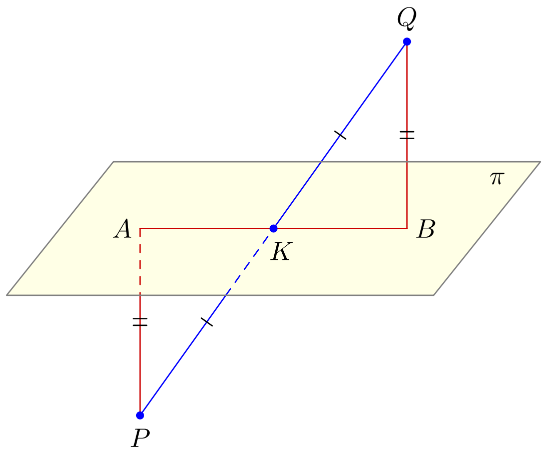


Рис. 64. Концы отрезка равноудалены от плоскости

Прямоугольные треугольники PKA и QKB равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $PA = QB$, что и требовалось.

Вернёмся к задаче 2. Заметим, что отрезок B_1C делится плоскостью ABC_1 пополам (рис. 65). Следовательно, расстояние от точки B_1 до плоскости ABC_1 равно расстоянию от точки C до этой плоскости.

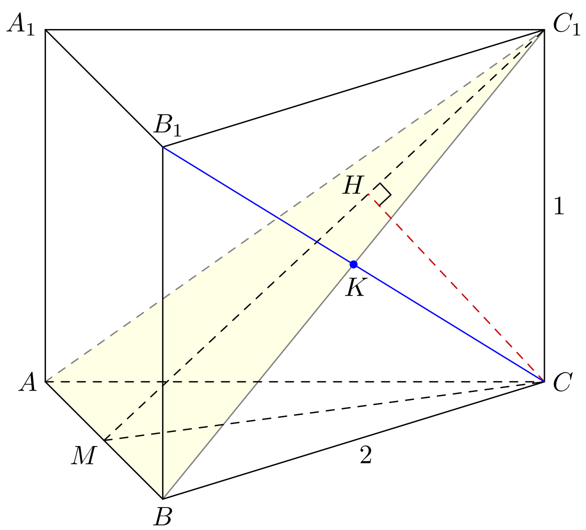


Рис. 65. К задаче 2

Итак, из точки B_1 переходим в точку C. Аналогично доказываем, что расстояние от точки C до плоскости ABC_1 равно длине перпендикуляра CH, проведённого к C_1M, — и далее решение повторяется без каких-либо изменений.

Сформулированный выше факт о равноудалённости концов отрезка от плоскости, проходящей через его середину, является частным случаем следующей (тоже очень простой) теоремы.

Теорема. Пусть прямая пересекает плоскость π в точке O. Возьмём любые две точки X и Y на этой прямой (отличные от O), и пусть x и y — соответственно расстояния от данных точек до плоскости π. Тогда $x : y = OX : OY$.

Доказательство. Если прямая перпендикулярна плоскости π, то доказывать нечего. Пусть прямая является наклонной (рис. 66). Проведём перпендикуляры XA и YB к плоскости π.

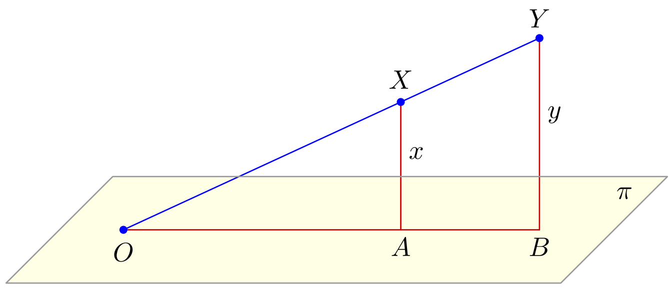


Рис. 66. $OX : OY = x : y$

Из подобия треугольников OXA и OYB получаем $OX : OY = XA : YB$, а последнее отношение как раз и есть $x : y$. Теорема доказана.

Полезность этой теоремы состоит вот в чём. Предположим, что мы ищем расстояние от точки X до плоскости π. Тогда, взяв некоторую точку $O \in \pi$, можно сместиться вдоль прямой OX в более удобную точку Y с пропорциональным изменением расстояния до нашей плоскости.

Задача 3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 2 и высота равна 1. Найдите расстояние от точки D до плоскости BCS.

Решение. Пусть ST — высота пирамиды (рис. 67). Точка T является серединой отрезка DB. Тогда, согласно нашей теореме, искомое расстояние d от точки D до плоскости BCS равно удвоенному расстоянию от точки T до этой плоскости.

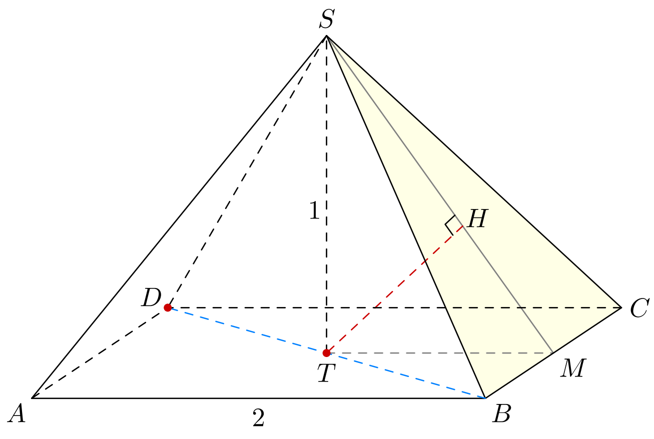


Рис. 67. К задаче 3

А расстояние от точки T до плоскости BCS равно высоте TH треугольника STM (точка M — середина BC). Действительно, TH перпендикулярна также прямой BC ($BC \perp TM$, $BC \perp SM \Rightarrow BC \perp STM \Rightarrow BC \perp TH$), и потому TH — перпендикуляр к плоскости BCS.

Из треугольника STM легко находим: $TH = \sqrt{2}/2$. Тогда $d = 2 \cdot TH = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Задача 4. Точка M — середина ребра DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ребро куба равно 6. Найдите расстояние от точки M до плоскости BC_1D.

Решение. Здесь можно осуществить переход $M \to D_1 \to C$ (рис. 68).

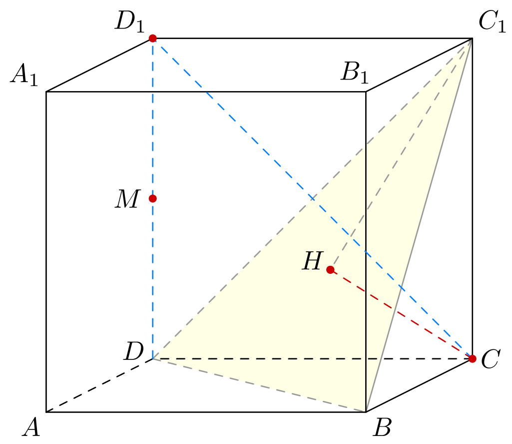


Рис. 68. К задаче 4

Именно, пусть искомое расстояние от точки M до плоскости BC_1D равно d. Тогда расстояние от точки D_1 до этой плоскости равно $2d$. Отрезок D_1C делится плоскостью BC_1D пополам, поэтому расстояние от точки C до данной плоскости также равно $2d$.

С другой стороны, расстояние от точки C до плоскости BC_1D есть высота CH треугольной пирамиды BC_1DC. Основанием этой пирамиды служит равносторонний треугольник BC_1D со стороной $6\sqrt{2}$. Боковые рёбра пирамиды равны 6. Стало быть, данная пирамида является правильной, и точка H — центр треугольника BC_1D.

Отрезок C_1H есть радиус окружности, описанной вокруг треугольника BC_1D. Имеем:

$$C_1H = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}.$$

Тогда

$$CH = \sqrt{CC_1^2 - C_1H^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = 2\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$d = \frac{CH}{2} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

12 Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми — это длина общего перпендикуляра, проведённого к этим прямым.

На рис. 69 мы видим скрещивающиеся прямые a и b. Для наглядности проведены параллельные плоскости π и σ, в которых лежат эти прямые. Расстояние d между прямыми a и b есть длина их общего перпендикуляра MN.

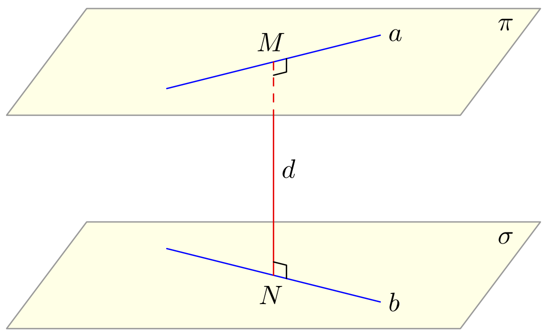


Рис. 69. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Заметим, что величина d есть также расстояние от *любой* точки прямой a до плоскости σ (и вообще от любой точки плоскости π до плоскости σ). Поэтому если в конкретной задаче общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым не просматривается, то можно искать расстояние от какой-либо удобной точки первой прямой до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой — это и будет расстояние между двумя данными прямыми.

12.1 Примеры решения задач

Рассмотрим три задачи. Первые две сравнительно простые, а третья соответствует уровню задачи №16 на ЕГЭ по математике.

Задача 1. Найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами правильного тетраэдра, длина ребра которого равна 1.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Найдём расстояние между прямыми AD и BC. Пусть M — середина AD, N — середина BC (рис. 70).

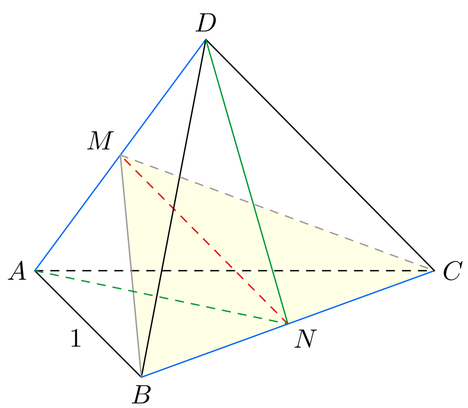


Рис. 70. К задаче 1

Покажем, что MN является общим перпендикуляром к прямым AD и BC. В самом деле, $BM = MC$; медиана MN равнобедренного треугольника BMC будет также его высотой, так что $MN \perp BC$. Точно так же медиана NM равнобедренного треугольника AND будет его высотой, поэтому $MN \perp AD$.

Итак, требуется найти MN. Имеем: $BM = \sqrt{3}/2$, $BN = 1/2$, и тогда по теореме Пифагора:

$$MN = \sqrt{BM^2 - BN^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1. Длина ребра куба равна 3.

Решение. Строить общий перпендикуляр к этим двум прямым — не самая лучшая идея. Мы будем действовать иначе. Проведём AD_1 и заметим, что $BC_1 \parallel AD_1$, и потому прямая BC_1 параллельна плоскости AB_1D_1 (рис. 71).

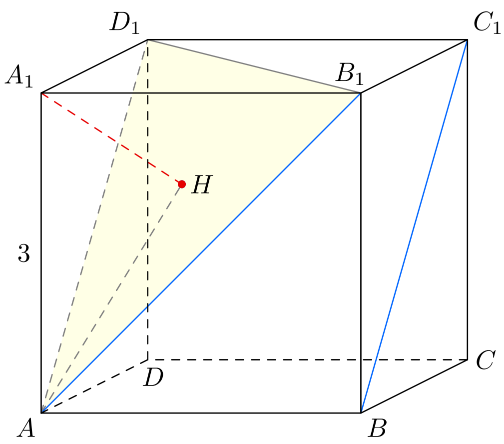


Рис. 71. К задаче 2

Следовательно, расстояние между прямыми BC_1 и AB_1 равно расстоянию от любой точки прямой BC_1 до плоскости AB_1D_1. Удобно взять, например, точку B.

Расстояние от точки B до плоскости AB_1D_1 равно расстоянию от точки A_1 до данной плоскости (поскольку отрезок A_1B делится этой плоскостью пополам). А расстояние от A_1 до плоскости AB_1D_1 есть высота A_1H треугольной пирамиды $AB_1D_1A_1$.

Основанием данной пирамиды служит равносторонний треугольник AB_1D_1 со стороной $3\sqrt{2}$. Боковые рёбра этой пирамиды равны 3. Стало быть, пирамида является правильной, и точка H — центр треугольника AB_1D_1.

Длина отрезка AH равна радиусу окружности, описанной вокруг треугольника AB_1D_1:

$$AH = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{3}.$$

Это и есть искомое расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача 3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) длина каждого ребра равна 4. Точка K — середина ребра SA. Найдите расстояние между прямыми AD и BK.

Решение. На рис. 72 изображено сечение пирамиды плоскостью KBC; это сечение является равнобедренной трапецией $BKLC$.

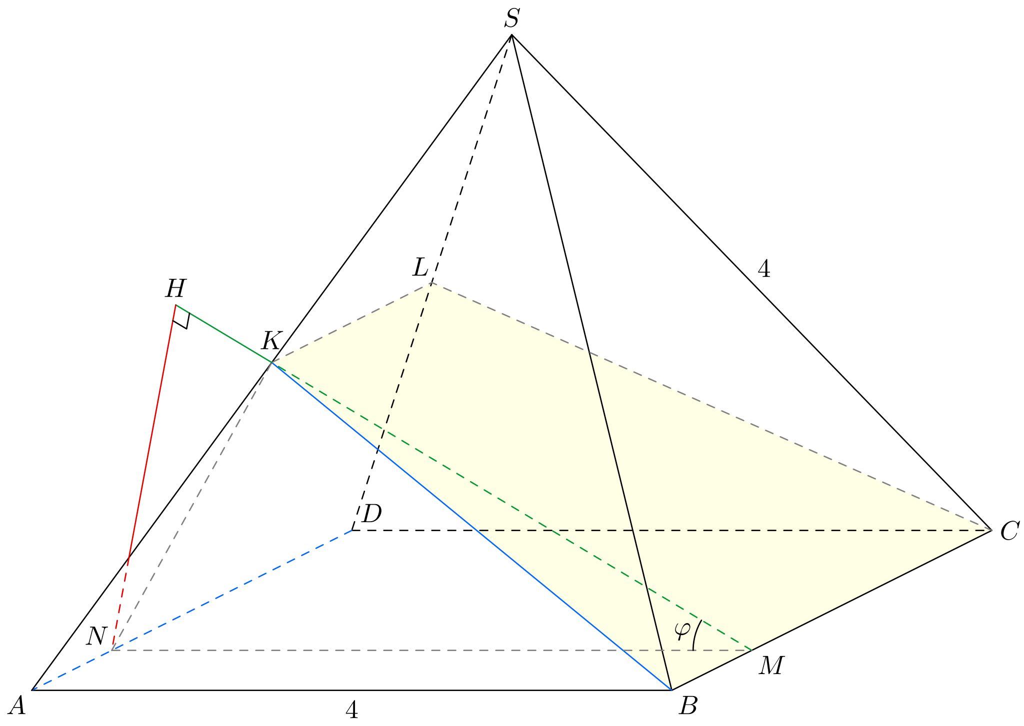


Рис. 72. К задаче 3

Поскольку $AD \parallel BC$, прямая AD параллельна плоскости KBC. Следовательно, искомое расстояние d между прямыми AD и BK равно расстоянию от любой точки прямой AD до плоскости KBC.

Через точку K проведём плоскость KNM, перпендикулярную прямой AD (и, стало быть, прямой BC). Эта плоскость пересекает прямые AD и BC в точках N и M соответственно. Ищем величину d как расстояние от точки N до плоскости KBC.

Отрезок KM является высотой трапеции $BKLC$. Проведём перпендикуляр NH на прямую KM. Вдобавок имеем $NH \perp BC$, поэтому NH — перпендикуляр к плоскости KBC.

Найдём длины сторон треугольника KNM. Очевидно, $NM = 4$. Далее, из треугольника AKN получаем:

$$KN = AK \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Из того же треугольника AKN находим: $AN = BM = 1$. С учётом того, что $BK = 2\sqrt{3}$, находим:

$$KM = \sqrt{BK^2 - BM^2} = \sqrt{11}.$$

(Заметим, что $KM^2 + KN^2 < NM^2$, поэтому угол NKM тупой. Вот почему высота NH оказывается вне треугольника KNM.)

Запишем теорему косинусов для стороны KN треугольника KNM:

$$3 = 16 + 11 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{11} \cos \varphi,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Остаётся вычислить

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\,,$$

и найти искомое расстояние:

$$NH = NM \cdot \sin\varphi = \frac{4\sqrt{22}}{11}\,.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{22}}{11}$.

13 Метод объёмов

Объём треугольной пирамиды можно посчитать несколькими разными способами. *Методом объёмов* мы называем приравнивание двух подходящих выражений для объёма, в результате чего удаётся вычислить искомую величину (расстояние или угол).

Метод объёмов можно использовать, вычисляя:

- расстояние от точки до плоскости;
- угол между прямой и плоскостью;
- угол между плоскостями;
- расстояние между скрещивающимися прямыми.

С идейной точки зрения метод объёмов весьма прост. Всё, что здесь нужно, — это найти подходящую треугольную пирамиду и аккуратно провести вычисления. Правда, вычислений обычно получается несколько больше, чем в методах, рассмотренных выше. Но тут уж ничего не поделаешь — за простоту метода приходится платить.

13.1 Расстояние от точки до плоскости

Замечательный факт состоит в том, что при вычислении объёма треугольной пирамиды можно в качестве основания выбрать любую её грань. Это используется при нахождении расстояния от точки до плоскости; нужно лишь представить искомое расстояние как высоту подходящей пирамиды.

А именно, предположим, что нам нужно найти расстояние от некоторой точки C до некоторой плоскости ABD. Рассмотрим треугольную пирамиду $ABCD$ (рис. 73). Тогда искомое расстояние — это высота d данной пирамиды, проведённая из вершины C.

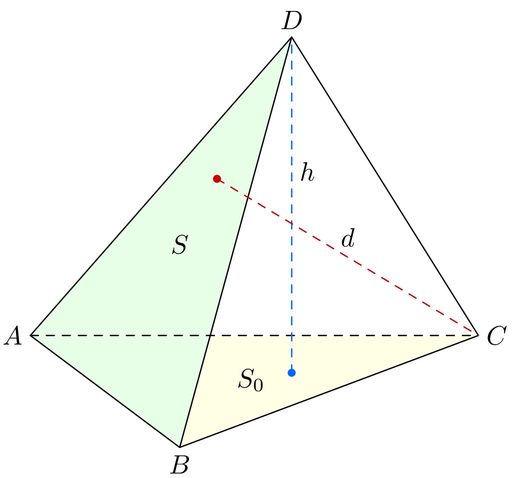


Рис. 73. $S_0h = Sd$

Пусть S_0 — площадь грани ABC, h — высота, опущенная на эту грань, S — площадь грани ABD. С одной стороны, объём пирамиды $ABCD$ может быть найден по формуле:

$$V = \frac{1}{3}S_0h. \tag{1}$$

С другой стороны, за основание можно принять грань ABD, и тогда

$$V = \frac{1}{3}Sd. \tag{2}$$

Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим:

$$S_0 h = Sd. \tag{3}$$

Из соотношения (3) можно найти искомую величину d.

Давайте посмотрим, как всё это работает в конкретной задаче. Разберём задачу, которую мы уже решали выше — в разделе «Расстояние от точки до плоскости».

Задача 1. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ (с вершиной P) сторона основания равна 2 и высота равна 1. Найдите расстояние от точки D до плоскости BCP.

Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду $BCDP$ (рис. 74). Искомое расстояние d есть высота этой пирамиды, проведённая из вершины D.

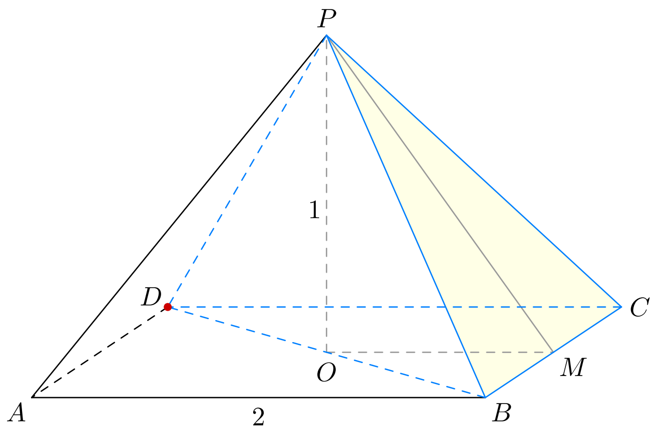


Рис. 74. К задаче 1

Высота пирамиды $BCDP$, проведённая из вершины P, совпадает с высотой PO исходной пирамиды. Согласно формуле (3) имеем:

$$S_{BCD} \cdot PO = S_{BCP} \cdot d. \tag{4}$$

По условию $PO = 1$. Легко находим $S_{BCD} = 2$. Остаётся вычислить площадь треугольника BCP. Его высоту PM найдём из треугольника POM: $PM = \sqrt{2}$, и тогда

$$S_{BCP} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PM = \sqrt{2}.$$

Подставляем найденные величины в (4):

$$2 \cdot 1 = \sqrt{2} \cdot d,$$

откуда

$$d = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Метод объёмов легко справляется с задачами, решить которые прежними методами было бы затруднительно.

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C.

Решение. Ситуация изображена на рис. 75. Подходящую треугольную пирамиду здесь увидеть легко — это пирамида $ABCB_1$. Надо найти её высоту d, опущенную из точки B.

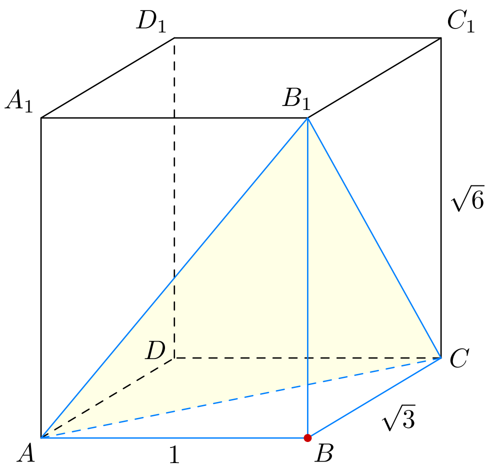


Рис. 75. К задаче 2

Снова имеем согласно (3):

$$S_{ABC} \cdot BB_1 = S_{AB_1C} \cdot d. \tag{5}$$

Очевидно, что

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь нужно найти площадь треугольника AB_1C. По теореме Пифагора вычисляем его стороны:

$$AC = 2, \quad AB_1 = \sqrt{7}, \quad B_1C = 3,$$

и по формуле Герона легко получаем:

$$S_{AB_1C} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}-1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляем найденные величины в (5):

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot d,$$

откуда

$$d = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Почему при решении этой задачи прежними методами мы столкнулись бы с проблемами? Дело в том, что в пирамиде $ABCB_1$ отсутствует симметрия — все рёбра пирамиды имеют различную длину. Соответственно, к проекции точки B на плоскость AB_1C не так-то просто «подобраться». Но методу объёмов, как видите, данная трудность нипочём — мы нашли искомую высоту d, даже не выясняя, куда именно проектируется точка B.

Освоив столь мощный метод нахождения расстояния от точки до плоскости, мы в качестве «дополнительной опции» немедленно получаем метод вычисления угла между прямой и плоскостью.

13.2 Угол между прямой и плоскостью

Идея вычисления угла между прямой и плоскостью очень проста и основана на предварительном вычислении расстояния от точки до плоскости. Давайте посмотрим на рис. 76.

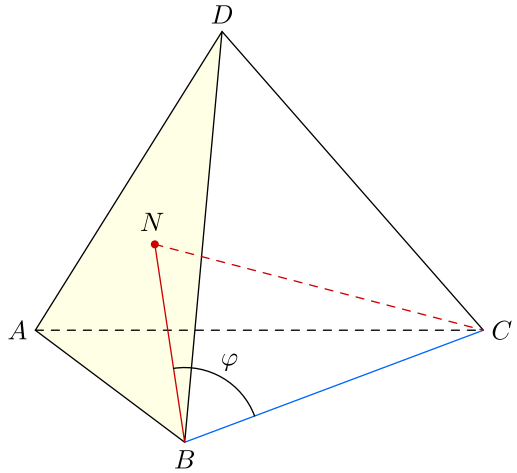


Рис. 76. Угол между прямой и плоскостью

Предположим, нам нужно найти угол φ между прямой BC и плоскостью ABD. Вычисляем сначала высоту CN, после чего находим:

$$\sin\varphi = \frac{CN}{BC}\,.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу с теми же исходными данными, что и предыдущая.

Задача 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C.

Решение. Ситуация показана на рис. 77.

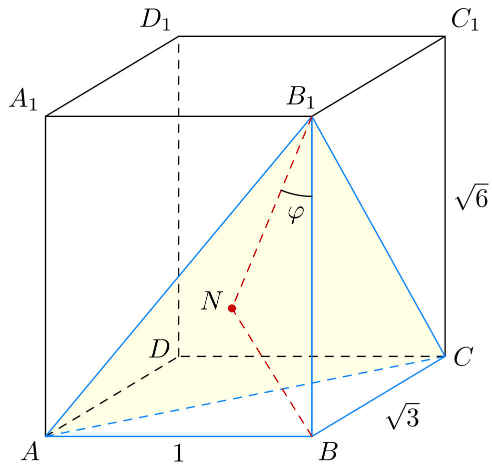


Рис. 77. К задаче 3

Расстояние от точки B до плоскости AB_1C мы уже нашли в предыдущей задаче:

$$BN = \frac{\sqrt{6}}{3}\,.$$

Остаётся найти искомый угол φ:

$$\sin\varphi = \frac{BN}{BB_1} = \frac{\sqrt{6}/3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\,.$$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}$.

13.3 Угол между плоскостями

При вычислении угла между плоскостями может оказаться полезной следующая формула для объёма треугольной пирамиды:

$$V = \frac{2}{3}\frac{S_1S_2}{a}\sin\varphi. \tag{6}$$

Здесь S_1 и S_2 — площади двух граней пирамиды, a — общее ребро этих граней, φ — угол между плоскостями этих граней.

Вывести данную формулу несложно. Давайте посмотрим на рис. 78.

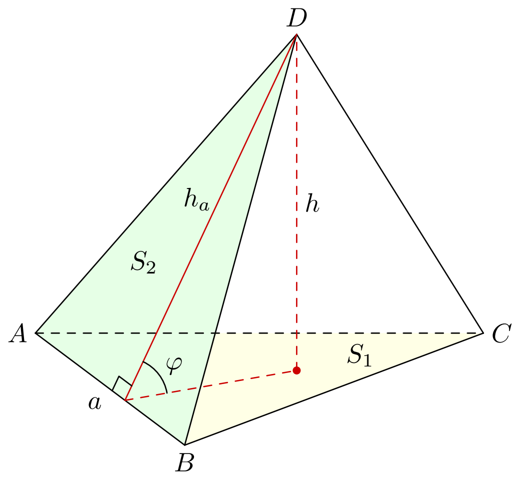


Рис. 78. К выводу формулы $V = \dfrac{2}{3}\dfrac{S_1S_2}{a}\sin\varphi$

Пусть S_1 и S_2 — площади треугольников ABC и ABD соответственно; пусть также $a = AB$ и φ — угол между плоскостями ABC и ABD. Из вершины D проведём высоту h пирамиды и высоту h_a грани ABD.

Легко видеть, что $h = h_a\sin\varphi$. Тогда для объёма пирамиды имеем:

$$V = \frac{1}{3}S_1h = \frac{1}{3}S_1h_a\sin\varphi. \tag{7}$$

С другой стороны, запишем формулу для площади S_2:

$$S_2 = \frac{ah_a}{2}\,,$$

откуда

$$h_a = \frac{2S_2}{a}\,.$$

Это выражение надо подставить в (7):

$$V = \frac{1}{3}S_1\frac{2S_2}{a}\sin\varphi = \frac{2}{3}\frac{S_1S_2}{a}\sin\varphi,$$

что нам и хотелось получить.

В качестве несложного упражнения возьмите параллелепипед из задачи 2 и с помощью формулы (6) найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC (ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$).

А мы рассмотрим более трудную ситуацию в том же параллелепипеде. Похожая задача предлагалась на ЕГЭ в 2010 году.

Задача 4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и CB_1D_1.

Решение. Делаем чертёж (рис. 79). Искомый угол φ будем вычислять с помощью треугольной пирамиды AB_1CD_1.

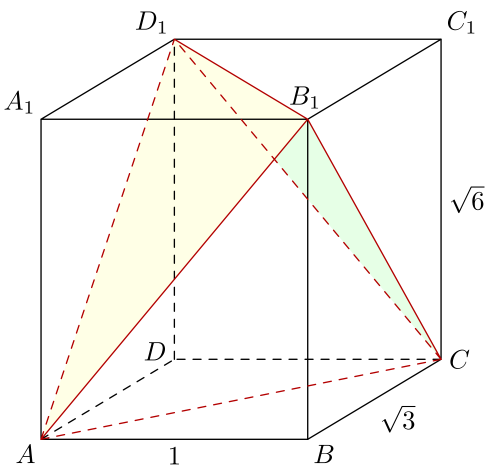


Рис. 79. К задаче 4

Согласно формуле (6) имеем:

$$V_{AB_1CD_1} = \frac{2}{3}\frac{S_{AB_1D_1}S_{CB_1D_1}}{B_1D_1}\sin\varphi. \tag{8}$$

Объём тетраэдра AB_1CD_1 мы найдём, «отрезая» от исходного параллелепипеда четыре равнообъёмных «куска»:

$$V_{AB_1CD_1} = V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} - V_{AA_1B_1D_1} - V_{ABCB_1} - V_{CB_1C_1D_1} - V_{ACDD_1}.$$

Объём параллелепипеда равен $1\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$, а объём каждого «куска»:

$$V_{AA_1B_1D_1} = V_{ABCB_1} = V_{CB_1C_1D_1} = V_{ACDD_1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Следовательно,

$$V_{AB_1CD_1} = 3\sqrt{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Теперь найдём площади граней AB_1D_1 и CB_1D_1. Имеем:

$$AB_1 = CD_1 = \sqrt{7}, \quad AD_1 = CB_1 = 3, \quad B_1D_1 = 2.$$

Таким образом, треугольники AB_1D_1 и CB_1D_1 имеют стороны 2, 3 и $\sqrt{7}$. Площадь такого треугольника мы уже посчитали в задаче 2:

$$S_{AB_1D_1} = S_{CB_1D_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

Подставляем найденные величины в формулу (8):

$$\sqrt{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} \sin\varphi,$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Многовато вычислений, не правда ли? Но таков уж метод объёмов. Правда, в данной задаче можно не прибегать к этому мощному методу и обойтись прежними средствами — то есть, явно построить линейный угол двугранного угла и вычислить его из некоторого треугольника. Решение получится более коротким и изящным. Сможете ли вы найти его?

13.4 Расстояние между скрещивающимися прямыми

При нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми может помочь следующая формула для объёма тетраэдра:

$$V = \frac{1}{6}abd\sin\varphi. \qquad (9)$$

Здесь a и b — скрещивающиеся рёбра тетраэдра, d и φ — соответственно расстояние и угол между ними (точнее, между прямыми, содержащими эти рёбра).

Дадим вывод этой формулы.

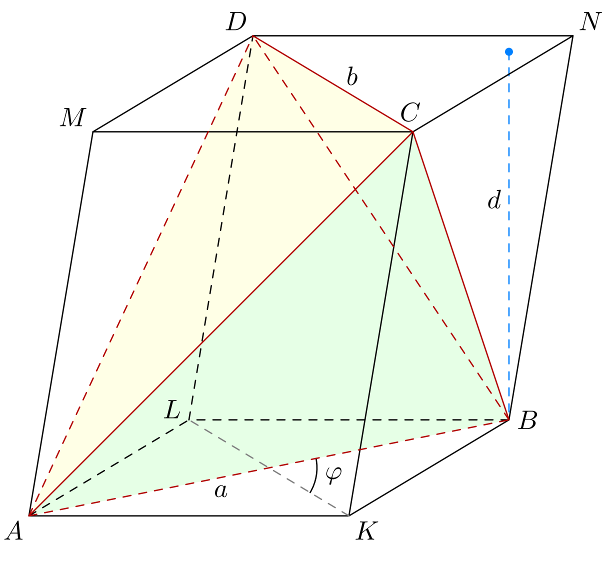


Рис. 80. К выводу формулы $V = \frac{1}{6}abd\sin\varphi$

На рис. 80 мы видим тетраэдр $ABCD$, достроенный до параллелепипеда $AKBLMCND$ следующим образом: через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная ребру, скрещивающемуся с данным ребром. Покажем, что объём V тетраэдра $ABCD$ равен одной трети объёма V_0 получившегося параллелепипеда.

Как и в задаче 4, отрезаем от параллелепипеда четыре тетраэдра:

$$V = V_0 - V_{AKBC} - V_{BCND} - V_{ALBD} - V_{ACMD}.$$

Все эти тетраэдры имеют одинаковый объём. В самом деле, если S и d — соответственно площадь основания и высота параллелепипеда, то

$$V_{AKBC} = V_{BCND} = V_{ALBD} = V_{ACMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot d = \frac{1}{6} Sd = \frac{V_0}{6}.$$

Тогда

$$V = V_0 - 4 \cdot \frac{V_0}{6} = \frac{V_0}{3}.$$

Пусть $a = AB$, $b = CD$. Расстояние между прямыми, проходящими через рёбра a и b, является расстоянием между параллельными плоскостями AKB и MCN, то есть высотой d нашего параллелепипеда. Угол между рёбрами a и b — это угол φ между прямыми AB и KL.

Для площади основания параллелепипеда имеем:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot KL \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} ab \sin\varphi$$

(есть такая формула планиметрии: площадь четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними). Объём параллелепипеда, стало быть, равен:

$$V_0 = S_0 d = \frac{1}{2} abd \sin\varphi.$$

Объём тетраэдра $ABCD$, как было показано выше, меньше в три раза, и тем самым мы приходим к нужной формуле (9).

Посмотрим, как работает данная формула в задаче, которую мы уже разбирали в разделе «Расстояние между скрещивающимися прямыми».

Задача 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1C. Ребро куба равно 3.

Решение. Делаем чертёж (рис. 81). Искомое расстояние d будем вычислять при помощи тетраэдра A_1BCB_1.

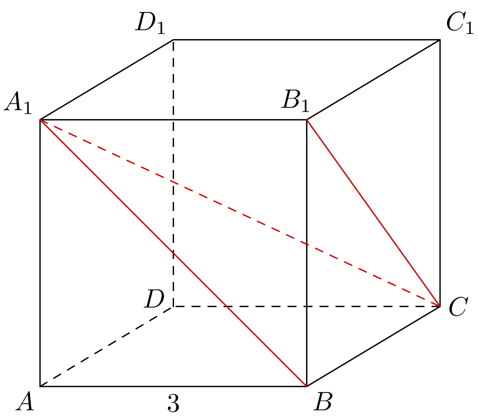


Рис. 81. К задаче 5

Объём V этого тетраэдра легко найти, приняв за основание грань BCB_1. Тогда:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

С другой стороны, согласно формуле (9) имеем:

$$V = \frac{1}{6} \cdot A_1B \cdot B_1C \cdot d \cdot \sin\varphi.$$

Здесь $A_1B = B_1C = 3\sqrt{2}$, угол φ между прямыми A_1B и B_1C равен 60° (почему?), так что

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3d\sqrt{3}}{2}\,.$$

Остаётся приравнять выражения для объёма:

$$\frac{9}{2} = \frac{3d\sqrt{3}}{2}\,,$$

и найти требуемое расстояние:

$$d = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

14 Сто тренировочных задач

Тренировочные задачи варьируются по сложности: от совсем элементарных до уровня задачи №16 и выше. Эти задачи призваны подготовить школьника к дальнейшей работе с «Задачником ЕГЭ-16», расположенном в следующем разделе.

Среди тренировочных задач есть несколько «не похожих» на задачи ЕГЭ. Они включены в задачник с целью расширения кругозора школьника.

Почти все тренировочные задачи — авторские.

14.1 Угол между скрещивающимися прямыми

1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите угол между прямыми AB и SC.

$\boxed{\arccos \frac{1}{4}}$

2. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 1. Найдите угол между прямыми AA_1 и BD_1.

$\boxed{\arccos \frac{1}{3}}$

3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна $\sqrt{6}$, а боковое ребро равно 3. Найдите угол между прямыми AC и SD.

$\boxed{45^\circ}$

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 4. Найдите угол между прямыми A_1B и AC.

$\boxed{\arccos \frac{3}{10}}$

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{2}$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1.

$\boxed{60^\circ}$

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 1. Найдите угол между прямыми AF_1 и B_1C.

$\boxed{90^\circ}$

7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 4$, а углы ASB, BSC и ASC — прямые. Точка M — середина ребра BS. Найдите угол между прямыми AM и BC.

$\boxed{\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}$

8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна $\sqrt{6}$, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра SC. Найдите угол между прямыми BM и AS.

$\boxed{60^\circ}$

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{6}$. Найдите угол между прямыми AB и FD_1.

$\boxed{60^\circ}$

10. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$. Точка M — середина ребра SC. Найдите угол между прямыми AM и BF.

$\boxed{\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}}$

11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны. Найдите угол между прямыми AF_1 и BD_1.

$\boxed{\arccos \frac{5\sqrt{2}}{8}}$

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны длины рёбер: $AB = 6$, $BC = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите угол между прямыми AC_1 и B_1C.

$\boxed{\arccos \frac{7}{5\sqrt{61}}}$

13. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 8$. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{11}$. Найдите угол между прямыми A_1B и B_1C.

$\boxed{60^\circ}$

14. На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K так, что $BK : KB_1 = 3 : 1$. Найдите угол между прямыми AK и BD_1.

$\boxed{\arccos \frac{\sqrt{3}}{15}}$

14.2 Угол между прямой и плоскостью

15. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 3, а боковое ребро равно $\sqrt{6}$. Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

$\boxed{30^\circ}$

16. На ребре B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K так, что $B_1K : KC_1 = 5 : 7$. Найдите угол между прямой AK и плоскостью ABC.

$\boxed{\operatorname{arctg} \frac{12}{13}}$

17. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{2}$. Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1.

$\boxed{45^\circ}$

18. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 4. Найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью ABB_1.

$\boxed{\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{5}}$

19. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 8. Найдите угол между прямой CD_1 и плоскостью ABB_1.

$\boxed{\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{10}}$

20. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой AC и плоскостью ABS.

$\boxed{30^\circ}$

21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{10}$. Найдите угол между прямой CD и плоскостью ABS.

$\boxed{45^\circ}$

22. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBE.

$\boxed{\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}}$

23. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Точка M — середина ребра SB. Найдите угол между прямой AM и плоскостью ASC.

$\boxed{\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{66}}{33}}$

24. Точка M — середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой AM и плоскостью ABC_1.

$\boxed{\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}}$

25. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной S) сторона основания равна 3, а боковое ребро равно $\sqrt{10}$. Точка M — середина ребра SB. Найдите угол между прямой AM и плоскостью ABC.

$\boxed{30^\circ}$

26. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб $ABCD$ со стороной 12 и углом BAD, равным 60°. Боковое ребро призмы равно 5. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

$\boxed{\arcsin \frac{6\sqrt{3}}{13}}$

27. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$. Точка M — середина ребра A_1B_1. Найдите угол между прямой AM и плоскостью ABC_1.

$\boxed{\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}}$

28. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью BC_1D.

$\boxed{\arcsin \frac{1}{3}}$

29. В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AB и BC равны соответственно 3 и 4, остальные рёбра равны 5. Найдите угол между прямой BD и плоскостью ABC.

$\boxed{60^\circ}$

30. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами. Докажите, что основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

31. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 5 и 6. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объём пирамиды.

$\boxed{\frac{25\sqrt{3}}{2}}$

14.3 Угол между плоскостями

32. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2, а высота равна $\sqrt{2}$. Найдите угол между плоскостями ABC и AB_1C.

$\boxed{45^\circ}$

33. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 3. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1BC.

$\boxed{60^\circ}$

34. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 6, а боковое ребро равно $\sqrt{21}$. Найдите угол между плоскостями SAB и ABC.

$\boxed{30^\circ}$

35. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной S) сторона основания равна 6, а боковое ребро равно $\sqrt{21}$. Найдите угол между плоскостями SAB и ABC.

$\boxed{60^\circ}$

36. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$. Найдите угол между плоскостями SAD и SBC.

$\boxed{90^\circ}$

37. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 1, а высота равна 3. Найдите угол между плоскостями ABC и AC_1E_1.

$\boxed{\operatorname{arctg} 2}$

38. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 3. Найдите угол между плоскостями ABC и AE_1F_1.

$\boxed{60^\circ}$

39. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной S) сторона основания равна $\sqrt{10}$, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями SAB и SBC.

$\boxed{\arccos \frac{4}{9} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{10}}{6}}$

40. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна $\sqrt{26}$, а боковое ребро равно 13. Найдите угол между плоскостями SAB и SBC.

$\boxed{\arccos\frac{1}{25}}$

41. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостями SAB и SCD.

$\boxed{\arccos\frac{5}{8}}$

42. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 4. Точка M — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостью ABM и плоскостью основания ABC.

$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}}$

43. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 1. Найдите угол между плоскостями A_1BC и AB_1C_1.

$\boxed{60^\circ}$

44. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $BC = 4$, $AA_1 = 12$. Найдите угол между плоскостями BC_1D и ABC.

$\boxed{\operatorname{arctg} 5}$

45. На ребре AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K так, что $AK : KA_1 = 1 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и KD_1C.

$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{5}{4}}$

46. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами. Докажите, что основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в основание пирамиды.

47. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 5 и 6. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объём пирамиды.

$\boxed{6\sqrt{3}}$

48. *Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника.*

а) Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости π. Угол между плоскостью ABC и плоскостью π равен α. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на плоскость π. Докажите, что $S_{ABH} = S_{ABC}\cos\alpha$.

б) Точки K, L, M — ортогональные проекции точек A, B, C на плоскость π. Угол между плоскостью ABC и плоскостью π равен α. Докажите, что $S_{KLM} = S_{ABC}\cos\alpha$.

в) Докажите, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость π равна площади многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью π. (Указание: разбейте многоугольник на треугольники.)

14.4 Расстояние от точки до прямой

49. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна $\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 2. Найдите расстояние от точки A до прямой SC.

$\boxed{\sqrt{3}}$

50. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки A до прямой SC.

$\boxed{\frac{3}{2}}$

51. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а высота равна 8. Найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.

$\boxed{\frac{3\sqrt{91}}{5}}$

52. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной S) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки A до прямой SM, где M — середина ребра BC.

$\boxed{\sqrt{2}}$

53. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 1, а высота равна 2. Найдите расстояние от точки A до прямой CD_1.

$\boxed{\sqrt{3}}$

54. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 2, а высота равна $\sqrt{13}$. Найдите расстояние от точки A до прямой CE_1.

$\boxed{\frac{2\sqrt{66}}{5}}$

55. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 5. Найдите расстояние от точки A до прямой SC.

$\boxed{\frac{24}{5}}$

56. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 1. Найдите расстояние от центра грани $ABCD$ до прямой BD_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

57. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от центра грани $ABCD$ до прямой AD_1. Ребро куба равно 4.

$\boxed{\sqrt{6}}$

58. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Точки M и N — середины рёбер AB и CC_1 соответственно. Найдите расстояние от точки A до прямой MN.

$\boxed{\sqrt{\frac{5}{6}}}$

59. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. На ребре CC_1 взята точка K так, что $CK = 1$. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BK.

$\boxed{2\sqrt{2}}$

60. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) все рёбра равны 6. Найдите расстояние от точки A до прямой BM, где M — середина ребра SC.

$\boxed{\sqrt{33}}$

61. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $AA_1 = 2\sqrt{3}$. Точки E и F служат серединами рёбер AB и BC соответственно. Найдите расстояние от точки D_1 до прямой EF.

$\boxed{\frac{2\sqrt{399}}{5}}$

62. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 6. Точки M и N — центры граней ABD и ACD соответственно. Найдите расстояние от точки A до прямой MN.

$\boxed{\sqrt{11}}$

14.5 Расстояние от точки до плоскости

63. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = BC = 1$, $AC = \sqrt{2}$, $AA_1 = 1$. Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости A_1BC_1.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

64. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной S) сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 3. Найдите расстояние от точки C до плоскости ABS.

$\boxed{\sqrt{\frac{15}{2}}}$

65. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = AC = 5$, $BC = 6$, $AA_1 = 3$. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1BC.

$\boxed{\frac{12}{5}}$

66. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5. Найдите расстояние от точки A до плоскости BCS.

$\boxed{\frac{3\sqrt{7}}{2}}$

67. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 5, а высота равна 12. Найдите расстояние от середины ребра AA_1 до плоскости BC_1D_1.

$\boxed{\frac{30}{13}}$

68. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости BCS.

$\boxed{\sqrt{7}}$

69. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна $\sqrt{3}$, а боковое ребро равно $\sqrt{7}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости CDS.

$\boxed{\frac{12}{5}}$

70. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна $5\sqrt{3}$, а высота равна 8. Найдите расстояние от точки A до плоскости BCE_1.

$\boxed{\frac{60}{17}}$

71. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 1. Найдите расстояние от точки C до плоскости BEF_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

72. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDM, где M — середина ребра CC_1.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}$

73. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от середины ребра CC_1 до плоскости AB_1C.

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

74. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 4, а высота равна 3. Найдите расстояние от середины ребра AA_1 до плоскости ACD_1.

$\boxed{\frac{6}{\sqrt{34}}}$

75. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 1, а высота равна 2. Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1MC, где M — середина ребра BB_1.

$\boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}}$

76. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна 4, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки C до плоскости ABM, где M — середина ребра SC.

$\boxed{\frac{4}{\sqrt{10}}}$

14.6 Расстояние между скрещивающимися прямыми

77. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной S) сторона основания равна $\sqrt{10}$, а боковое ребро равно 5. Найдите расстояние между прямыми AS и BC.

$\boxed{\sqrt{\frac{13}{2}}}$

78. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) сторона основания равна $\sqrt{26}$, а боковое ребро равно 13. Найдите расстояние между прямыми AC и BS.

$\boxed{2\sqrt{3}}$

79. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и DE_1.

$\boxed{\sqrt{3}}$

80. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AD_1 и B_1C.

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

81. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите расстояние между прямыми AS и BC.

$\boxed{\sqrt{3}}$

82. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 1. Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

83. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $10\sqrt{3}$, а высота равна 8. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC.

$\boxed{\frac{120}{17}}$

84. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2, а высота равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.

$\boxed{1}$

85. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние между прямыми AS и CD.

$\boxed{2\sqrt{2}}$

86. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 3. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

$\boxed{\frac{3}{2}}$

87. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 10, а высота равна 12. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CD_1.

$\boxed{\frac{180}{13}}$

88. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 3. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

$\boxed{3\sqrt{\frac{2}{11}}}$

89. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб $ABCD$ с углом при вершине A, равным 30°. Все рёбра призмы равны 2. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

$\boxed{1}$

90. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 3. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

$\boxed{\frac{3}{\sqrt{10}}}$

14.7 Сечения

91. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Точка E — середина ребра B_1C_1. Найдите площадь сечения куба плоскостью ABE.

$\boxed{2\sqrt{5}}$

92. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ (с вершиной D) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 4. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью KLM, где K, L, M — середины рёбер AB, BC и CD соответственно.

$\boxed{2}$

93. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно 4, а сторона основания равна 6. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, B и середину ребра B_1C_1.

$\boxed{\frac{9\sqrt{91}}{4}}$

94. В правильной четырёхугольной пирамиде $ABCDE$ (с вершиной E) все рёбра равны 4. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью ABK, где K — середина ребра CE.

$\boxed{3\sqrt{11}}$

95. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину D_1 и середины рёбер AD и CD.

$\boxed{6}$

96. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Точка E — середина ребра A_1D_1. Найдите площадь сечения куба плоскостью ACE.

$\boxed{18}$

97. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1, а высота равна 2. Точка M — середина ребра AA_1. Найдите площадь сечения призмы плоскостью BMD_1.

$\boxed{\sqrt{3}}$

98. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = 5$. Точка M расположена на ребре AA_1 так, что $AM = 4$. а) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью BMD_1. б) Найдите угол между плоскостями BMD_1 и ABC (указание: используйте теорему о площади ортогональной проекции многоугольника).

$\boxed{\text{а) } 2\sqrt{21}; \text{ б) } \arccos\frac{3\sqrt{7}}{14}}$

99. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 4, а высота равна $3\sqrt{6}$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершину D_1 и середины рёбер AB и BC.

$\boxed{28}$

100. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна $\sqrt{15}$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и CC_1.

$\boxed{6}$

15 Задачник ЕГЭ-16

Здесь приведены задачи №16 (в прошлом С2), которые предлагались на ЕГЭ по математике, а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

1. (*ЕГЭ, 2015*) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

б) $\frac{1075}{9}$

2. (*МИОО, 2015*) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

а) $3 : 11$; б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10}}{3}$

3. (*МИОО, 2015*) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4 : 3$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

б) 90

4. (*МИОО, 2015*) В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите периметр этого сечения.

б) 19

5. (*ЕГЭ, 2014*) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ стороны основания ABC равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $CD = BE = LM = 2$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

$2\sqrt{30}$

6. (*ЕГЭ, 2014*) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

$\operatorname{arctg} 2$

7. (*ЕГЭ, 2014*) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MA перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MB равно 5. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = 2$ и $BE = ML = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

$\boxed{2\sqrt{3}}$

8. (*ЕГЭ, 2014*) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 5 : 1$. Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MK. Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

$\boxed{2\arcsin\frac{\sqrt{682}}{44}}$

9. (*ЕГЭ, 2014*) Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\sqrt{3}/4$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

$\boxed{\arccos\frac{7}{32}}$

10. (*МИОО, 2014*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

$\boxed{\frac{3\sqrt{39}}{4}}$

11. (*МИОО, 2014*) Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $5/7$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{5}{4\sqrt{6}}}$

12. (*МИОО, 2014*) Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB. Найдите высоту данной пирамиды.

$\boxed{5}$

13. (*МИОО, 2013*) Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

$\boxed{36}$

14. (*МИОО, 2013*) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

$\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

15. (*МИОО, 2013*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4 : 5$, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

$\boxed{\sqrt{1281}}$

16. (*ЕГЭ, 2013*) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые рёбра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA.

$\boxed{\frac{27}{2}}$

17. (*ЕГЭ, 2013*) В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно $\sqrt{5}$, а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

$\boxed{12\left(7-4\sqrt{3}\right)\pi}$

18. (*ЕГЭ, 2013*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1 = 1$. Точка F принадлежит ребру C_1D_1 и делит его в отношении $2 : 1$, считая от вершины C_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и F.

$\boxed{12\sqrt{2}}$

19. (*ЕГЭ, 2013*) В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

$\boxed{5\sqrt{2}}$

20. (*МИОО, 2013*) Правильные треугольники ABC и BCM лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

$\boxed{24}$

21. (*МИОО, 2013*) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1. Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

$\boxed{3}$

22. (*ФЦТ, 2013*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 7, а сторона основания равна 8.

$\boxed{2\sqrt{29}}$

23. (*МИОО, 2013*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 10$, $SC = 8$.

$\boxed{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{10}}$

24. (*МИОО, 2013*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен $36°$. На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B.

$\boxed{16\sqrt{3}}$

25. (*МИОО, 2012*) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 8, а боковые рёбра равны $\sqrt{13}$. Изобразите сечение, проходящее через вершины A, C и середину ребра A_1B_1. Найдите его площадь.

$\boxed{30}$

26. (*МИОО, 2012*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

$\boxed{8\sqrt{5}}$

27. (*ЕГЭ, 2012*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

$\boxed{\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}}$

28. (*ЕГЭ, 2012*) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

$\boxed{\frac{3}{\sqrt{13}}}$

29. (*ЕГЭ, 2012*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

$\boxed{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{13}}{2}}$

30. (*ЕГЭ, 2012*) Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью C_1DE, если рёбра куба равны 2.

$\boxed{9/2}$

31. (*ЕГЭ, 2012*) На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

$\boxed{\arccos \frac{2\sqrt{30}}{15}}$

32. (*ЕГЭ, 2012*) Точка E — середина ребра DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми CE и AC_1.

$\boxed{\arccos \frac{1}{\sqrt{15}}}$

33. (*Репетиционный ЕГЭ, 2012*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.

$\boxed{45^\circ}$

34. (*Репетиционный ЕГЭ, 2012*) Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60°. Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

$\boxed{10}$

35. (*МИОО, 2012*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 6$, $AB = 4$.

$\boxed{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}}{5}}$

36. (*МИОО, 2012*) Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM, где M — середина ребра SC.

$\boxed{1}$

37. (*МИОО, 2011*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна 1. M — середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

38. (*МИОО, 2011*) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

$\boxed{\operatorname{arctg} \frac{3}{5}}$

39. (*МИОО, 2011*) Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = 5$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 13.

$\boxed{45^\circ}$

40. (*ЕГЭ, 2011*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

$\boxed{\arcsin \frac{3\sqrt{2}}{10}}$

41. (*ЕГЭ, 2011*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точка E — середина ребра SB. Найдите угол между прямой CE и плоскостью SBD.

$\boxed{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}$

42. (*ЕГЭ, 2011*) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

43. (*ЕГЭ, 2011*) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{91}}{2}}$

44. (*ЕГЭ, 2011*) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой F_1E_1.

$\boxed{7}$

45. (*ЕГЭ, 2011*) В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямыми AC и BC_1.

$\boxed{\arccos\frac{3\sqrt{2}}{10}}$

46. (*Репетиционный ЕГЭ, 2011*) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12. Найдите расстояние от центра основания до боковой грани, если двугранный угол при ребре основания равен $\pi/3$.

$\boxed{3}$

47. (*Репетиционный ЕГЭ, 2011*) Длины всех рёбер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP, если точка M — середина бокового ребра пирамиды AP.

$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}}$

48. (*МИОО, 2011*) Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, у которого $AB = 10$, $BD = 12$. Высота призмы равна 6. Найдите расстояние от центра грани $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости BDC_1.

$\boxed{\frac{24}{5}}$

49. (*МИОО, 2011*) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $2\sqrt{10}$; высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM, где M — середина ребра A_1C_1.

$\boxed{2}$

50. (*МИОО, 2011*) Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

51. (*МИОО, 2011*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT, где T — середина ребра AD.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}$

52. (*МИОО, 2011*) Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, где L — середина ребра MC, O — центр грани ABC.

$\boxed{\frac{\sqrt{7}}{14}}$

53. (*МИОО, 2010*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

54. (*МИОО, 2010*) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

$\boxed{\arccos\frac{1}{3}}$

55. (*МИОО, 2010*) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M — середина ребра B_1C_1, а точка T — середина A_1M. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT.

$\boxed{2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{8}}$

56. (*МИОО, 2010*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 3$, $AD = 8$, $AB = 6$, найдите угол между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины рёбер AB и B_1C_1.

$\boxed{\mathrm{arctg}\,\frac{3}{5}}$

57. (*МИОО, 2010*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T — середины рёбер CD и A_1B_1 соответственно.

$\boxed{12}$

58. (*ЕГЭ, 2010*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями AB_1C и DCC_1.

$\boxed{\sqrt{2}}$

59. (*ЕГЭ, 2010*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 6\sqrt{3}$, $SC = 10$. Точка N — середина ребра BC. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AT, где T — середина отрезка SN.

$\boxed{\mathrm{arctg}\,\frac{8}{15}}$

60. (*ЕГЭ, 2010*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 6$. Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

$\boxed{\arccos \frac{9}{41}}$

61. (*ЕГЭ, 2010*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

$\boxed{\mathrm{arctg}\, \frac{24}{25}}$

62. (*ЕГЭ, 2010*) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 8\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер AS и BC.

$\boxed{\mathrm{arctg}\, \frac{15}{16}}$

63. (*ЕГЭ, 2010*) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 7, а высота равна 1. Найдите угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1.

$\boxed{\arcsin \frac{1}{\sqrt{151}}}$

64. (*МИОО, 2010*) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1.

$\boxed{2}$

65. (*МИОО, 2010*) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SA.

$\boxed{\frac{\sqrt{39}}{4}}$

66. (*МИОО, 2010*) В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD.

$\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

67. (*Репетиционный ЕГЭ, 2010*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM, где точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2 : 1$.

$\boxed{\mathrm{arctg}\, \frac{8}{3}}$

68. (*МИОО, 2010*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{3}/2$. Найдите расстояние от точки C до прямой SA.

$\boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}$

69. (*МИОО, 2010*) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

70. (*МИОО, 2010*) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1.

$\boxed{\frac{\sqrt{95}}{10}}$

71. (*МИОО, 2010*) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. Найдите угол между прямыми CA_1 и AB_1.

$\boxed{\arccos\frac{1}{25}}$

72. (*МИОО, 2010*) В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

$\boxed{\arccos\frac{9}{25}}$

73. (*МИОО, 2009*) В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол $30°$ с плоскостью AA_1B_1. Найдите высоту призмы.

$\boxed{10\sqrt{2}}$

74. (*МИОО, 2009*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.

$\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

75. (*МИОО, 2009*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины рёбер AA_1 и C_1D_1.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{10}}}$

76. (*МИОО, 2009*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

$\boxed{\arcsin\frac{24}{85}}$

77. (*МИОО, 2009*) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

$\boxed{\frac{3}{4}}$