Тригонометрические функции. Синус и косинус

В геометрии синус и косинус определяются как функции острого угла прямоугольного треугольника. Давайте вспомним для начала, как это делается.

Геометрическое определение

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Обозначим через α угол, лежащий напротив катета a (рис. 1).

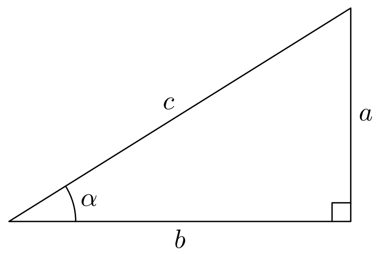

Рис. 1. $\sin\alpha = a/c$, $\cos\alpha = b/c$

Таким образом, катет a оказывается *противолежащим катетом* для угла α, а катет b будет *прилежащим катетом*.

Синус угла α — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,. \qquad (1)$$

Косинус угла α — это отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}\,. \qquad (2)$$

Ясно, что данные определения корректны, то есть не зависят от выбора треугольника. Действительно, все прямоугольные треугольники с острым углом α подобны друг другу, и у всех них отношение a/c одинаково; также одинаково у них и отношение b/c. Поэтому значения синуса и косинуса зависят лишь от величины α, но не от выбранного треугольника.

Возьмём, в частности, треугольник с единичной гипотенузой ($c = 1$). В таком треугольнике противолежащий к углу α катет будет равен $\sin\alpha$, а прилежащий катет равен $\cos\alpha$ (рис. 2).

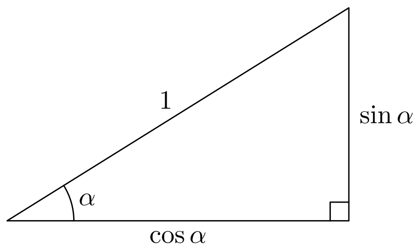

Рис. 2. Треугольник с единичной гипотенузой

Записав для этого треугольника теорему Пифагора, получим *основное тригонометрическое тождество*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Тригонометрическое определение

С помощью формул (1), (2) можно найти синус и косинус острого угла. Но мы хотим большего — научиться вычислять синус и косинус угла произвольной величины. Прямоугольный треугольник не даёт такой возможности (тупого угла, например, в нём быть не может); следовательно, нужно более общее определение синуса и косинуса, содержащее формулы (1) и (2) как частный случай.

На помощь приходит тригонометрическая окружность. Пусть α — некоторый угол; ему отвечает одноимённая точка α на тригонометрической окружности (рис. 3).

Определение. Косинус угла α — это абсцисса точки α. Синус угла α — это ордината точки α.

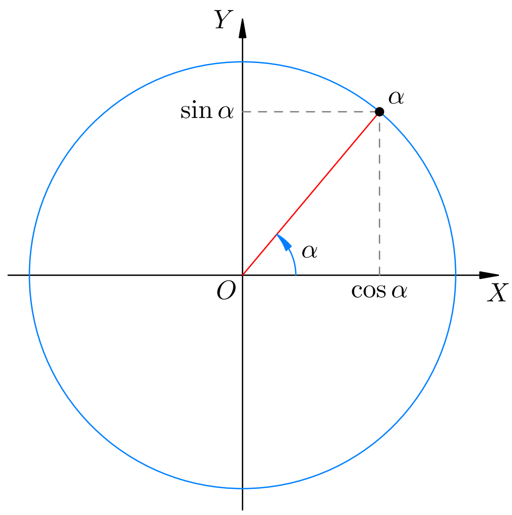

Рис. 3. Тригонометрическое определение синуса и косинуса

На рис. 3 угол α взят острым, и легко понять, что данное определение совпадает с геометрическим определением (1) и (2). В самом деле, мы видим прямоугольный треугольник с единичной гипотенузой $O\alpha$ и острым углом α. Прилежащий катет этого треугольника есть $\cos\alpha$ (сравните с рис. 2) и одновременно абсцисса точки α; противолежащий катет есть $\sin\alpha$ (как на рис. 2) и одновременно ордината точки α.

Но теперь мы уже не стеснены первой четвертью и получаем возможность распространить данное определение на любой угол α. На рис. 4 показано, что такое синус и косинус угла α во второй, третьей и четвёртой четвертях.

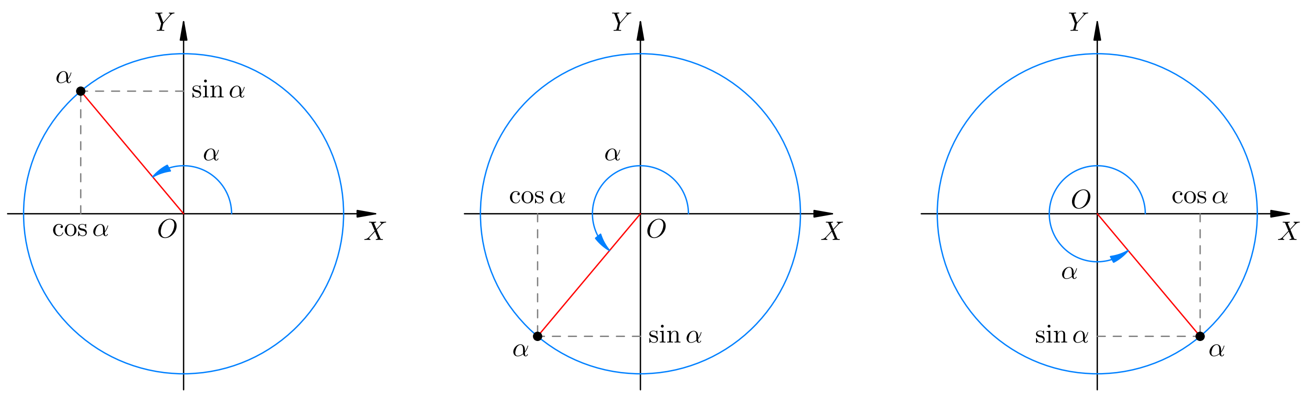

Рис. 4. Синус и косинус во II, III и IV четвертях

Нетрудно убедиться, что основное тригонометрическое тождество также распространяется на произвольные углы. Действительно, в каждой из четвертей мы получаем прямоугольный треугольник с единичной гипотенузой и катетами $|\cos\alpha|$ и $|\sin\alpha|$. По теореме Пифагора:

$$|\cos\alpha|^2 + |\sin\alpha|^2 = 1,$$

то есть опять-таки

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Табличные значения синуса и косинуса

Итак, определение синуса и косинуса с помощью тригонометрической окружности обобщает геометрическое определение (1), (2) на любые углы, как нам и хотелось. Теперь можно заняться вычислением значений синуса и косинуса для некоторых важных углов (так называемых табличных значений).

1. *Нулевой угол* (рис. 5).

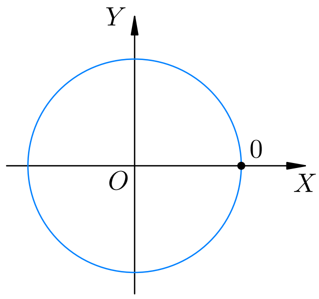

Рис. 5. Нулевой угол

Абсцисса точки 0 равна 1, ордината точки 0 равна 0. Следовательно,

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0.$$

2. *Угол* $\pi/6 = 30°$ (рис. 6).

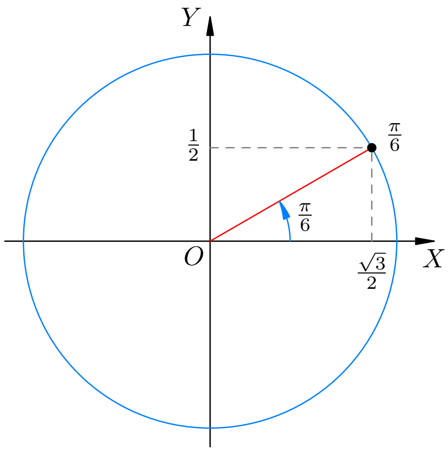

Рис. 6. Угол $\pi/6$

Мы видим прямоугольный треугольник с единичной гипотенузой и острым углом 30°. Как известно, катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы[1]; иными словами, вертикальный катет равен $1/2$ и, стало быть,

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

[1]Почему так получается? Разрежьте равносторонний треугольник со стороной 2 вдоль его высоты! Он распадётся на два прямоугольных треугольника с гипотенузой 2, острым углом 30° и меньшим катетом 1.

Горизонтальный катет находим по теореме Пифагора (или, что то же самое, находим косинус по основному тригонометрическому тождеству):

$$\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

3. *Угол* $\pi/4 = 45^\circ$ (рис. 7).

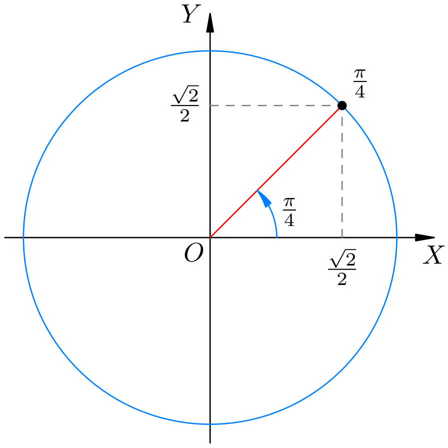

Рис. 7. Угол $\pi/4$

В данном случае прямоугольный треугольник является равнобедренным; синус и косинус угла 45° равны друг другу. Обозначим их пока через x. Имеем:

$$x^2 + x^2 = 1,$$

откуда $x = \sqrt{2}/2$. Следовательно,

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

4. *Угол* $\pi/3 = 60^\circ$ (рис. 8).

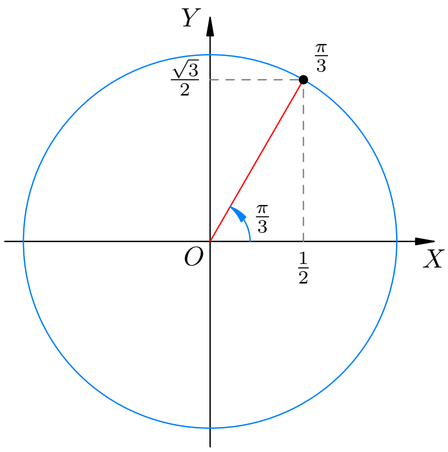

Рис. 8. Угол $\pi/3$

Здесь всё точно так же, как в ситуации с углом $\pi/6$. Снова катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы; только на сей раз синус и косинус меняются местами:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\,, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

5. *Угол* $\pi/2 = 90^\circ$ (рис. 9).

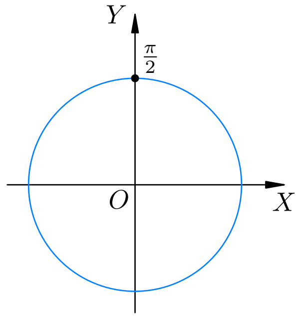

Рис. 9. Угол $\pi/2$

Абсцисса точки $\pi/2$ равна нулю, ордината равна 1, поэтому:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

6. *Углы* $2\pi/3 = 120^\circ$, $3\pi/4 = 135^\circ$, $5\pi/6 = 150^\circ$ (рис. 10).

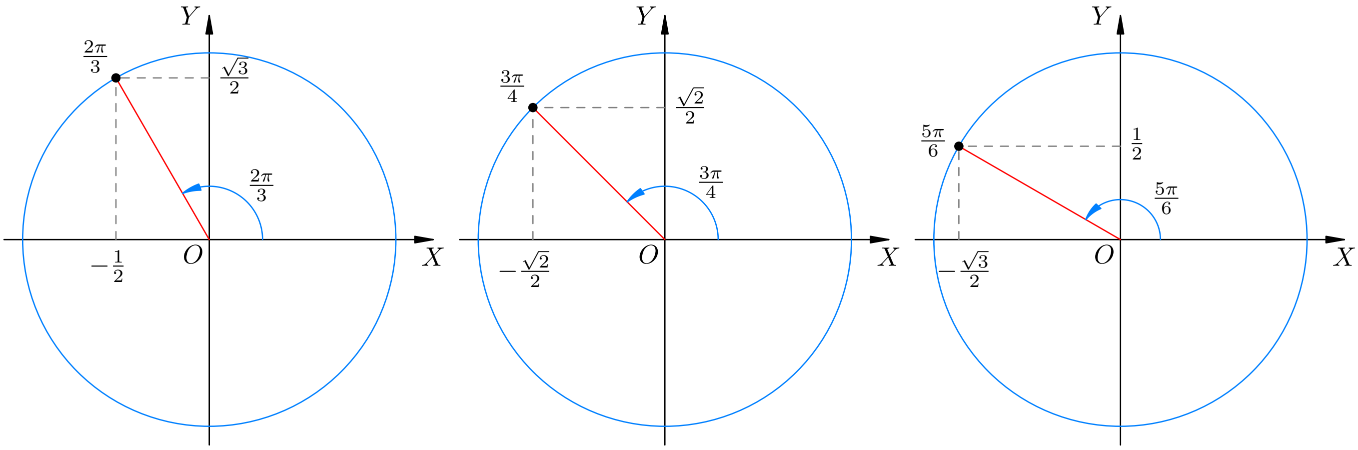

Рис. 10. Углы $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$

Точка $2\pi/3$ симметрична точке $\pi/3$ относительно оси OY (поскольку $2\pi/3 = \pi - \pi/3$; сравните с рис. 8). Имеем:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\,, \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Точка $3\pi/4$ симметрична точке $\pi/4$ относительно оси OY (поскольку $3\pi/4 = \pi - \pi/4$; сравните с рис. 7). Имеем:

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Точка $5\pi/6$ симметрична точке $\pi/6$ относительно оси OY (поскольку $5\pi/6 = \pi - \pi/6$; сравните с рис. 6). Имеем:

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

7. *Угол* $\pi = 180^\circ$. Сделайте рисунок и убедитесь самостоятельно, что

$$\cos\pi = -1, \quad \sin\pi = 0.$$

Тригонометрический круг

Выше мы нашли значения синуса и косинуса некоторых углов на промежутке $[0; \pi]$. Увеличивая на π каждый из этих углов, получим соответствующие углы из промежутка $[\pi; 2\pi]$.

Найти значения синуса и косинуса полученных углов не составляет труда. Общую картину мы видим на рис. 11, где изображён *тригонометрический круг* табличных значений синуса и косинуса на промежутке $[0; 2\pi]$. Рядом с радианной мерой угла приведена его градусная мера.

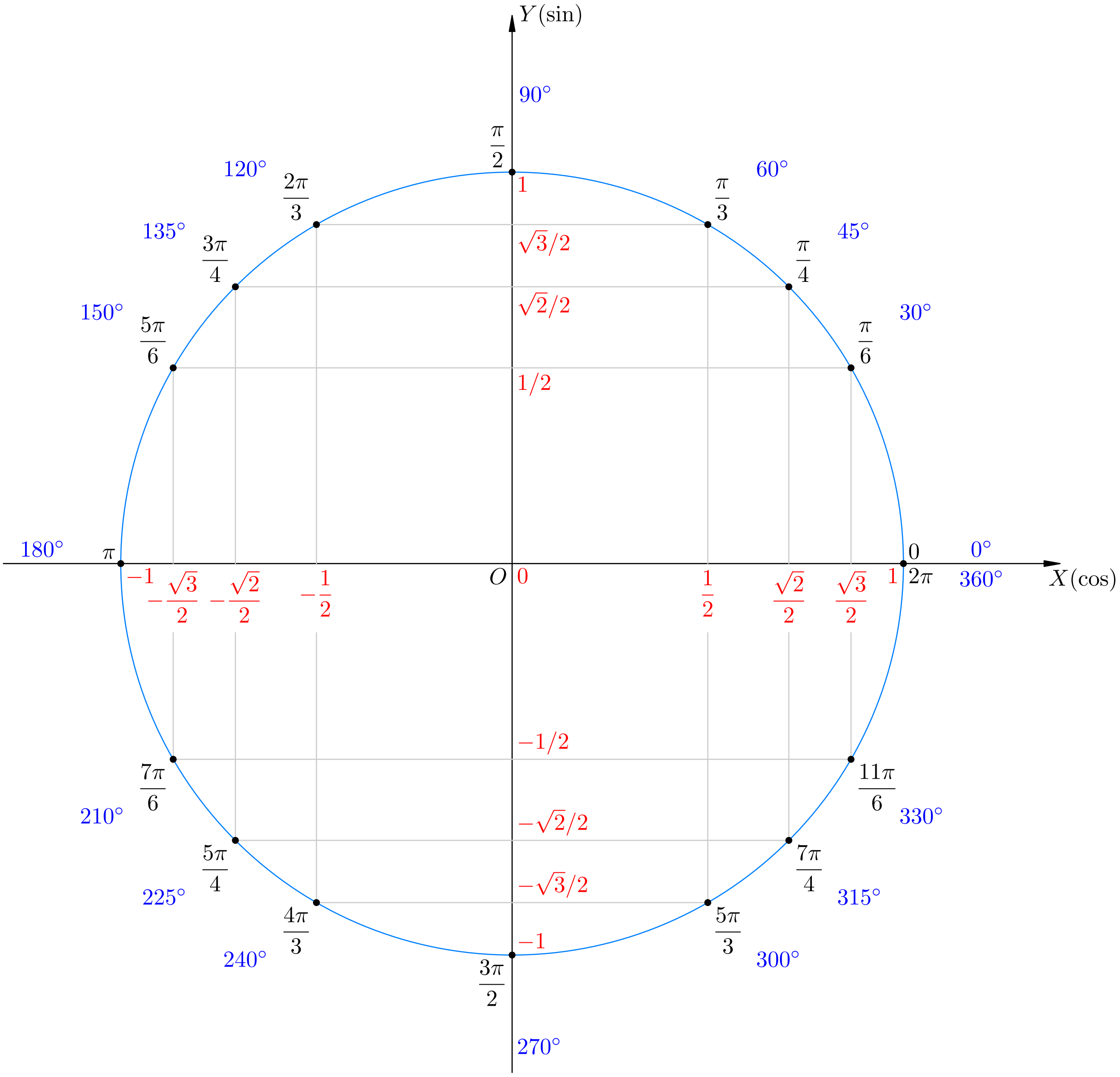

Рис. 11. Тригонометрический круг: табличные значения синуса и косинуса

После прохождения полного угла 2π цикл заканчивается, и в процессе дальнейшего движения по тригонометрической окружности синус и косинус периодически принимают одни и те же значения. Например:

$$\sin \frac{13\pi}{6} = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

График синуса

Теперь мы готовы к тому, чтобы построить график функции $y = \sin x$. Тригонометрический круг даёт нам всю необходимую информацию.

Возьмём на тригонометрическом круге значения синуса всех представленных углов и изобразим соответствующие точки координатной плоскости (рис. 12). По оси абсцисс отложен угол в радианах, по оси ординат — значения синуса угла.

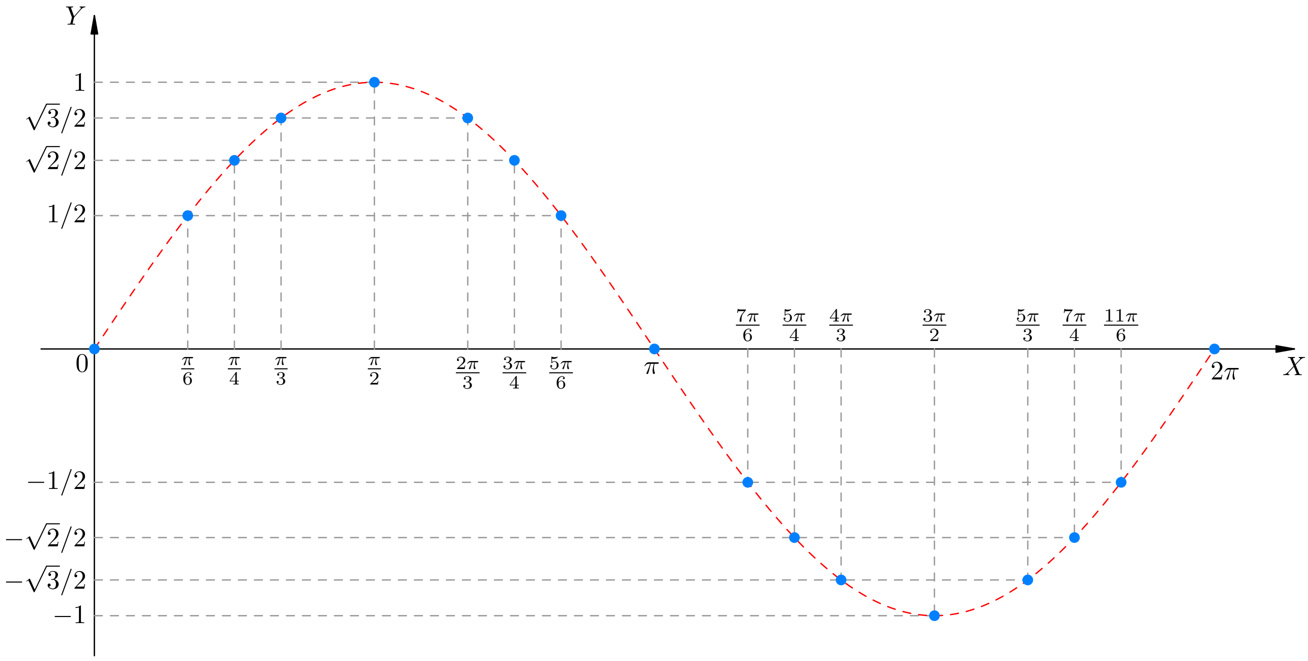

Рис. 12. Графическое изображение тригонометрического круга (синус)

Как видим, наши точки укладываются на плавную кривую. Пунктирная кривая — это график функции $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Ясно, что изображённого фрагмента достаточно для построения графика функции $y = \sin x$ на всей числовой оси. Ведь значения синуса на тригонометрическом круге периодически повторяются после совершения одного или нескольких полных оборотов. Стало быть, график синуса получается периодическим повторением построенного выше фрагмента и выглядит следующим образом (рис. 13).

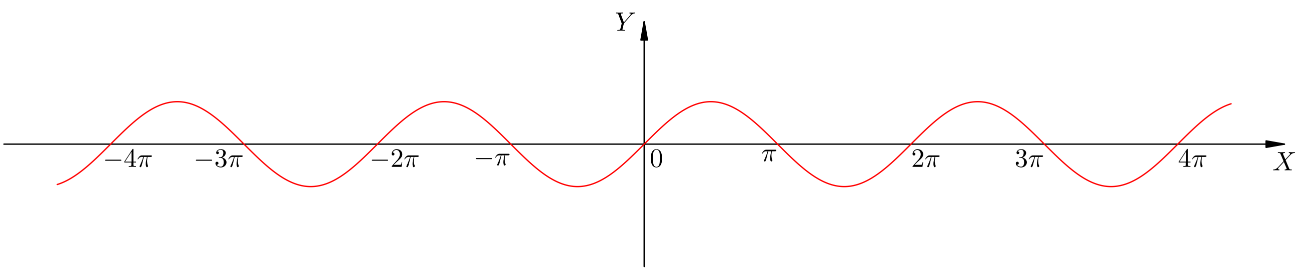

Рис. 13. График функции $y = \sin x$

График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой*. Как видим, начало координат служит центром симметрии данного графика.

График косинуса

Точно так же, как и в случае синуса, мы можем построить график функции $y = \cos x$. Изображаем на графике информацию с тригонометрического круга (рис. 14). По оси абсцисс — снова угол в радианах, по оси ординат — косинус угла.

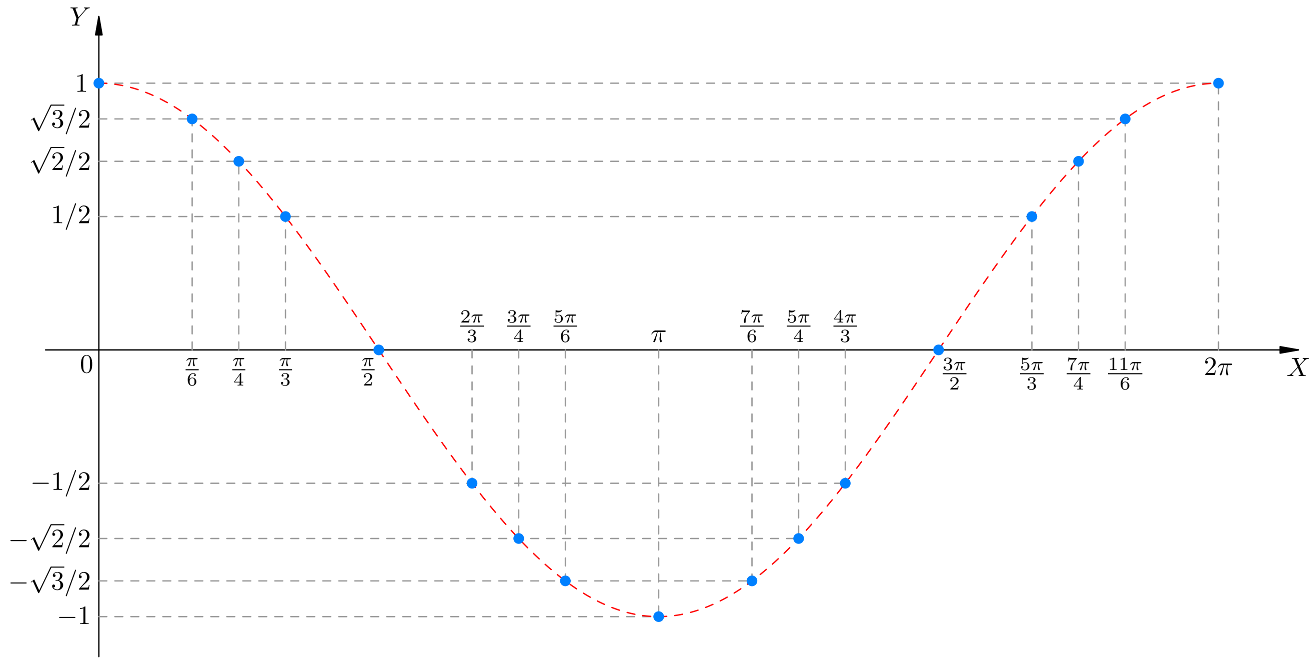

Рис. 14. Графическое изображение тригонометрического круга (косинус)

Пунктирная кривая — это график функции $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$. График косинуса на всей числовой оси получается периодическим повторением данного фрагмента (рис. 15).

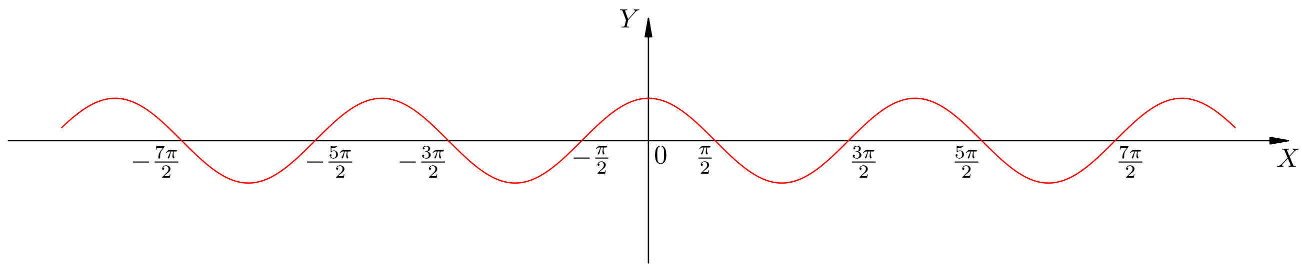

Рис. 15. График функции $y = \cos x$

Как видим, данный график симметричен относительно оси Y.

Основные свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Область определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ есть множество всех действительных чисел:

$$D(\sin) = \mathbb{R}, \quad D(\cos) = \mathbb{R}.$$

(в самом деле значения синуса и косинуса можно найти для какого угодно угла).

Область значений функций $y = \sin x$ и и $y = \cos x$ есть отрезок от -1 до 1:

$$E(\sin) = [-1; 1], \quad E(\cos) = [-1; 1].$$

(в самом деле, абсцисса и ордината точки тригонометрической окружности не могут оказаться по модулю больше единицы).

Для любого x имеют место равенства:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Это означает, что функции синус и косинус *периодичны* с периодом 2π. Более того, любое число, кратное 2π, также является периодом данных функций:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi n) = \cos x \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Никакое другое число периодом данных функций не является; иными словами, число 2π есть *наименьший положительный период* синуса и косинуса.

Нам осталось обсудить важные свойства чётности и нечётности синуса и косинуса.

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если $f(-x) = f(x)$. Например, функция $f(x) = x^2$ является чётной, поскольку $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$. Например, функция $f(x) = x^3$ является нечётной, поскольку $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Теперь давайте посмотрим на рис. 16. Изображены углы α и $-\alpha$. Точка α имеет координаты $a = \cos\alpha$ и $b = \sin\alpha$. Точка $-\alpha$ имеет координаты $a = \cos(-\alpha)$ и $-b = \sin(-\alpha)$.

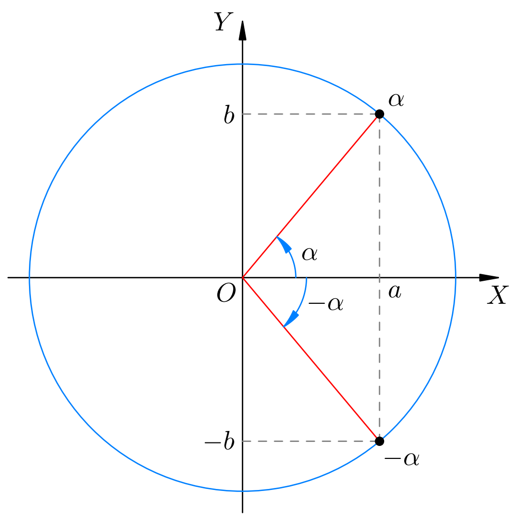

Рис. 16. Синус и косинус угла $-\alpha$

Отсюда ясно, что:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Таким образом, *косинус — чётная функция, синус — нечётная функция.*

Например:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

График нечётной функции симметричен относительно начала координат; график чётной функции симметричен относительно оси ординат. Эти симметрии мы уже отметили выше на рис. 13 и рис. 15.