Прямая Симсона

Задача 1. (*Прямая Симсона*) Из точки P, расположенной на описанной окружности треугольника ABC, опустили перпендикуляры на прямые AB, BC и AC. Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой.

Задача 2. (*Всеросс. по геометрии, 2014*) Дан прямоугольник $ABCD$. Через точку B провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону AD в точке K, а вторая — продолжение стороны CD в точке L. Пусть F — точка пересечения KL и AC. Докажите, что $BF \perp KL$.

Задача 3. Основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB, BC и AC, лежат на одной прямой. Докажите, что точка P принадлежит описанной окружности треугольника ABC.

Задача 4. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что точка A и центры окружностей, описанных около треугольников ABC, ABD и ACD, лежат на одной окружности.

Задача 5. (*Теорема Птолемея*) Докажите, что для вписанного четырёхугольника $ABCD$ справедливо равенство $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

Задача 6. Хорда PQ описанной окружности треугольника ABC перпендикулярна стороне BC. Докажите, что прямая AQ параллельна прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC.

Задача 7. Точка H — ортоцентр треугольника ABC; точка P лежит на описанной окружности этого треугольника. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC проходит через середину отрезка PH.

Задача 8. (*Всеросс. по геометрии, 2012*) Дан треугольник ABC. Рассматриваются прямые l, обладающие следующим свойством: три прямые, симметричные l относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

Задача 9. (*Всеросс. по геометрии, 2009*) Дан треугольник ABC и точки X, Y, не лежащие на его описанной окружности Ω. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции X на BC, CA, AB, а A_2, B_2, C_2 — проекции Y. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_1, B_1, C_1 на соответственно B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямая XY проходит через центр Ω.

Задача 10. (*Всеросс. по геометрии, 2014, финал, 10*) Дан фиксированный треугольник ABC. Пусть D — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в D, проходящая через A, пересекает вторично прямые AB и AC в точках A_b и A_c соответственно. Аналогично определяются точки B_a, B_c, C_a и C_b. Точку D назовём *хорошей*, если точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a и C_b лежат на одной окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника ABC?

Две, три или четыре