# Симедиана

Пусть дан треугольник $ABC$ и $CM$ — его медиана. Пусть $S$ — такая точка на стороне $AB$, что луч $CS$ симметричен лучу $CM$ относительно биссектрисы угла $C$. Тогда отрезок $CS$ называется *симедианой* треугольника $ABC$.

Во избежание постоянных оговорок удобно называть симедианой и медианой также лучи (или прямые) $CS$ и $CM$. Тогда можно просто говорить, что симедиана симметрична медиане относительно биссектрисы.

Задача 1. Докажите, что симедиана $CS$ делит сторону на отрезки, которые относятся как квадраты прилежащих сторон:

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AC^2}{BC^2}\,.$$

Задача 2. Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке (*точка Лемуана*).

Задача 3. Пусть $a$, $b$, $c$ — длины сторон треугольника. Докажите, что длина симедианы, проведённой к стороне $c$, выражается формулой

$$s = \frac{ab}{a^2+b^2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\,.$$

Задача 4. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике симедиана совпадает с высотой в том и только в том случае, если это треугольник прямоугольный.

Задача 5. На прямых $CA$ и $CB$ взяты соответственно точки $B'$ и $A'$ так, что $\angle CA'B' = \angle CAB$ (отрезки $AB$ и $A'B'$ в этом случае называются *антипараллельными*). Докажите, что симедиана $CS$ треугольника $ABC$ делит отрезок $A'B'$ пополам.

Задача 6. Сторона $AC$ треугольника $ABC$ является хордой окружности, касающейся прямой $BC$ в точке $C$. Вторая окружность проходит через точки $B$, $C$ и касается прямой $AC$ в точке $C$. Пусть $D \neq C$ — точка пересечения этих окружностей. Докажите, что $CD$ — симедиана треугольника $ABC$.

Задача 7. (*МГУ, мехмат, 2003-07.4*) Через вершины $A$ и $B$ треугольника $ABC$ проведена окружность, касающаяся прямой $BC$, а через вершины $B$ и $C$ — другая окружность, касающаяся прямой $AB$. Продолжение общей хорды $BD$ этих окружностей пересекает отрезок $AC$ в точке $E$, а продолжение хорды $AD$ одной окружности пересекает другую окружность в точке $F$. Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$. Сравнить площади треугольника $ABC$ и $ABF$.

25 : 81; одинаковы

Задача 8. (*ММО, 2008, 10.5*) Высоты $AA'$ и $CC'$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Точка $B_0$ — середина стороны $AC$. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных $BB_0$ и $HB_0$ относительно биссектрис углов $ABC$ и $AHC$ соответственно, лежит на прямой $A'C'$.

Задача 9. (*Всеросс. по геометрии, 2015, 9.7*) В остроугольном неравнобедренном треугольнике $ABC$ высоты $AA'$ и $BB'$ пересекаются в точке $H$, а медианы треугольника $AHB$ пересекаются в точке $M$. Прямая $CM$ делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол $C$.

Задача 10. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2009, 10–11*) К двум окружностям $\omega_1$ и $\omega_2$, пересекающимся в точках $A$ и $B$, проведена их общая касательная $CD$ ($C$ и $D$ — точки касания соответственно, точка $B$ ближе к прямой $CD$, чем $A$). Прямая, проходящая через $A$, вторично пересекает $\omega_1$ и $\omega_2$ в точках $K$ и $L$ соответственно ($A$ лежит между $K$ и $L$). Прямые $KC$ и $LD$ пересекаются в точке $P$. Докажите, что $PB$ — симедиана треугольника $KPL$.

Задача 11. Окружность описана около треугольника $ABC$. Касательные к окружности, проведённые в точках $A$ и $B$, пересекаются в точке $P$. Докажите, что $CP$ является симедианой треугольника $ABC$.

*Указание.* Используйте теорему о симметричной бабочке из листка «Инверсия».

Задача 12. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 10.3*) В остроугольном треугольнике $ABC$ на высоте $BK$ как на диаметре построена окружность $S$, пересекающая стороны $AB$ и $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. К окружности $S$ в точках $E$ и $F$ проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника $ABC$, проведённую из вершины $B$.

Задача 13. (*Всеросс. по геометрии, 2012, 10.7*) Дан треугольник $ABC$. Касательная в точке $C$ к его описанной окружности пересекает прямую $AB$ в точке $D$. Касательные к описанной окружности треугольника $ACD$ в точках $A$ и $C$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что прямая $DK$ делит отрезок $BC$ пополам.

Задача 14. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10.2*) Даны окружность, её хорда $AB$ и середина $W$ меньшей дуги $AB$. На большей дуге $AB$ выбирается произвольная точка $C$. Касательная к окружности, проведённая из точки $C$, пересекает касательные, проведённые из точек $A$ и $B$, в точках $X$ и $Y$ соответственно. Прямые $WX$ и $WY$ пересекают прямую $AB$ в точках $N$ и $M$ соответственно. Докажите, что длина отрезка $NM$ не зависит от выбора точки $C$.

Задача 15. (*Всеросс., 2015, финал, 11.7*) Неравнобедренный треугольник $ABC$ вписан в окружность $\omega$. Касательная к этой окружности в точке $C$ пересекает прямую $AB$ в точке $D$. Пусть $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$. Прямые $AI$ и $BI$ пересекают биссектрису угла $CDB$ в точках $Q$ и $P$ соответственно. Пусть $M$ — середина отрезка $PQ$. Докажите, что прямая $MI$ проходит через середину дуги $ACB$ окружности $\omega$.

Задача 16. (*Всеросс., 2016, финал, 10.8*) Пусть $ABC$ — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть $M$ — середина отрезка $AB$. В окружности $\omega$, описанной около треугольника $ABC$, проведен диаметр $CC'$. Прямая $CM$ пересекает прямые $AC'$ и $BC'$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой $AC'$, проведенный через точку $K$, перпендикуляр к прямой $BC'$, проведенный через точку $L$, и прямая $AB$ образуют треугольник $\Delta$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $\Delta$, касается окружности $\Omega$.

## Вокруг симедианы

Задача 17. (*Всеросс. по геометрии, 2008, 8*) Пусть $CC_0$ — медиана треугольника $ABC$, серединные перпендикуляры к $AC$ и $BC$ пересекают $CC_0$ в точках $A'$ и $B'$, прямые $AA'$ и $BB'$ пересекаются в точке $C_1$. Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

Задача 18. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10.6*) Треугольник $ABC$ вписан в окружность $\Omega$ с центром $O$. Окружность, построенная на $AO$ как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника $OBC$ в точке $S \neq O$. Касательные к $\Omega$ в точках $B$ и $C$ пересекаются в точке $P$. Докажите, что точки $A$, $S$ и $P$ лежат на одной прямой.

Задача 19. (*Всеросс., 2013, финал, 9.2*) Остроугольный треугольник $ABC$ вписан в окружность $\Omega$. Касательные, проведённые к $\Omega$ в точках $B$ и $C$, пересекаются в точке $P$. Точки $D$ и $E$ — основания перпендикуляров, опущенных из точки $P$ на прямые $AB$ и $AC$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $ADE$ является серединой отрезка $BC$.

Задача 20. (*Всеросс., 2013, финал, 9.7*) На сторонах остроугольного треугольника $ABC$ вне него построены квадраты $CAKL$ и $CBMN$. Прямая $CN$ пересекает отрезок $AK$ в точке $X$, а прямая $CL$ пересекает отрезок $BM$ в точке $Y$. Точка $P$, лежащая внутри треугольника $ABC$, является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников $KXN$ и $LYM$. Точка $S$ — середина отрезка $AB$. Докажите, что $\angle ACS = \angle BCP$.

Задача 21. (*Всеросс., 2014, финал, 9.4*) Точка $M$ — середина стороны $AC$ остроугольного треугольника $ABC$, в котором $AB > BC$. Окружность $\Omega$ описана около треугольника $ABC$. Касательные к $\Omega$, проведённые в точках $A$ и $C$, пересекаются в точке $P$. Отрезки $BP$ и $AC$ пересекаются в точке $S$. Пусть $AD$ — высота треугольника $ABP$. Окружность $\omega$, описанная около треугольника $CSD$, пересекает окружность $\Omega$ в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.

Задача 22. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 10–11*) Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$ в точках $A$ и $C$, пересекаются в точке $Z$. $AA_1$, $CC_1$ — высоты. Прямая $A_1C_1$ пересекает прямые $ZA$, $ZC$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $ABC$ и $XYZ$ касаются.