Сечения

1. (*«Физтех», 2010.4*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 2$. Точка K лежит на высоте SO, причём $KO : SO = 3 : 4$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки B до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SB.

$\frac{1}{3\sqrt{5}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\arcsin\frac{4}{5}$

2. (*МФТИ, 2004.4*) Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1, середину ребра AD и параллельной прямой A_1C_1;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна.

$\frac{7\sqrt{17}}{24}$; $2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

3. (*МФТИ, 2003.4*) Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Высота призмы равна $\sqrt{6}$. На сторонах AC, BC и A_1C_1 выбраны соответственно точки D, E и D_1 так, что $DC = \frac{AC}{4}$, $BE = CE$, $A_1D_1 = \frac{A_1C_1}{3}$, и через эти точки проведена плоскость Π. Найти:

1) площадь сечения призмы плоскостью Π;
2) угол между плоскостью Π и плоскостью ABC;
3) расстояние от точек C_1 и C до плоскости Π.

1) $\frac{329}{30}$; 2) $\arccos\frac{5}{7}$; 3) $\frac{8\sqrt{6}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{6}}{7}$

4. (*МФТИ, 2001.4*) Апофема правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро образует с основанием $ABCD$ угол, равный $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{SK}{KC} = \frac{1}{2}$. Найти:

1. площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2. расстояние от точки D до плоскости EFK;
3. угол между прямой SD и плоскостью EFK.

1) $\frac{14}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\arcsin\frac{3}{5}$

5. (*МФТИ, 1995.4*) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 3\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 8. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку A, а другая — через точки B и D, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SC плоскости сечений? Найти расстояние между плоскостями сечений и объемы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями.

$1 : 1 : 1$; $h = \frac{12}{5}$

6. (*МФТИ, 1998.5*) Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6, а высота равна $\frac{3}{\sqrt{7}}$. На ребрах AC, A_1C_1 и BB_1 расположены соответственно точки P, F и K так, что $AP = 1$, $A_1F = 3$ и $BK = KB_1$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P, F и K. Найти площадь сечения и угол между плоскостью основания призмы и плоскостью сечения.

$\boxed{\frac{39}{4},\ \frac{\pi}{6}}$

7. (*МФТИ, 2002.6*) Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SC и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность, причем периметр сечения равен $\frac{32}{5}$. Найти:

1. в каком отношении плоскость α делит ребра пирамиды;

2. отношение объемов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду;

3. расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α.

$\boxed{1)\ \frac{3}{5} \text{ и } \frac{2}{5};\ 2)\ \frac{26}{99};\ 3)\ \frac{22\sqrt{14}}{35\sqrt{15}}}$

8. (*МФТИ, 2000.6*) В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADC равен $2\arcsin\left(\frac{1}{6}\right)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины ребер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $3ME = KE$. Через точку E проходит плоскость π перпендикулярно отрезку KM. В каком отношении плоскость π делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью π и расстояние от точки N до плоскости π.

$\boxed{\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{7}{12},\ \frac{C_1D}{CD} = \frac{21}{32};\ S = \frac{49\sqrt{65}}{576};\ \rho = \frac{13}{2\sqrt{10}}}$

9. (*МФТИ, 1999.6*) Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна $2\sqrt{2}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $SF = 5DF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найти:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;
2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;
3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

$\boxed{1)\ \frac{77}{36};\ 2)\ \frac{40\sqrt{2}}{33};\ 3)\ \arccos\frac{7}{11}}$

10. (*МФТИ, 1997.5*) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найти площадь сечения куба плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и граней $ABCD$, BCC_1B_1 и DCC_1D_1.

$\boxed{\frac{2a^2}{\sqrt{3}},\ \frac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$

11. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2014.5*) В правильном тетраэдре $ABCD$ проведено сечение так, что оно проходит через точки K, L, M, лежащие на рёбрах DC, DB, DA соответственно. При этом $DK : KC = 1 : 3$, $DL : LB = 2 : 1$, $DM : MA = 1 : 1$. Найдите угол между плоскостями грани ABC и построенного сечения.

$\boxed{\arccos\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{131}}}$

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011.5*) Рассматриваются плоские сечения правильной пирамиды $SABCD$, параллельные боковому ребру SB и диагонали основания AC, в которые можно вписать окружность. Какие значения может принимать радиус этих окружностей, если $AC = 1$, $\cos\angle SBD = \frac{2}{3}$?

$\boxed{\left(0; \frac{1}{6}\right] \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}}$

13. (*«Ломоносов», 2009.4*) Можно ли данный двугранный угол величиной 90° пересечь плоскостью так, чтобы в полученном сечении образовался угол величиной 110°?

14. (*Моск. матем. регата, 2013, 11*) В кубе с ребром длины 1 провели два сечения в виде правильных шестиугольников. Найдите длину отрезка, по которому эти сечения пересекаются.

$\boxed{\sqrt{2}}$

15. (*МГУ, мехмат, 2003-07.6*) Высота AH тетраэдра $ABCD$ пересекается с его высотой BE, но не лежит в одной плоскости ни с одной из других его высот. На отрезке $HE = 4$ взята точка O, равноудаленная от граней тетраэдра, образующая двугранный угол в 30° при ребре $CD = 5$. Найти площадь сечения тетраэдра, проходящего через точку O и являющегося прямоугольником.

$\boxed{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$

16. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 11*) В прямоугольном параллелепипеде одно из сечений является правильным шестиугольником. Докажите, что этот параллелепипед — куб.

17. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 11*) Семь треугольных пирамид стоят на столе. Для любых трёх из них существует горизонтальная плоскость, которая пересекает их по треугольникам равной площади. Доказать, что существует плоскость, пересекающая все семь пирамид по треугольникам равной площади.

18. (*Всеросс., 1996, финал, 11*) Докажите, что при $n \geqslant 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником.

19. (*Всеросс., 2004, финал, 11*) В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение, являющееся шестиугольником. Известно, что этот шестиугольник можно поместить в некоторый прямоугольник П. Докажите, что в прямоугольник П можно поместить одну из граней параллелепипеда.

20. (*Всеросс., 1993, финал, 11*) Докажите, что если два прямоугольных параллелепипеда имеют равные объёмы, то их можно расположить в пространстве так, что любая горизонтальная плоскость, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по многоугольнику той же площади.

21. (*Турнир городов, 2003, 10–11*) Некоторый куб рассекли плоскостью так, что в сечении получился пятиугольник. Докажите, что длина одной из сторон этого пятиугольника отличается от 1 метра по крайней мере на 20 сантиметров.

22. (*Турнир городов, 2011, 10–11*) От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.

а) Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?

б) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой — равносторонним треугольником со стороной 2?

23. (*Турнир городов, 1990, 10–11*) Можно ли так выбрать шар, треугольную пирамиду и плоскость, чтобы всякая плоскость, параллельная выбранной, пересекала шар и пирамиду по фигурам равной площади?

24. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2006, 10–11*) Основанием пирамиды служит выпуклый четырёхугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основание и являющееся вписанным четырёхугольником?