Сборная солянка

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. (*Всеросс., 2015, МЭ, 8.6*) Гномы сели за круглый стол и голосованием решили много вопросов. По каждому вопросу можно было голосовать «за», «против» или воздержаться. Если оба соседа какого-либо гнома по какому-нибудь вопросу выбрали один и тот же вариант ответа, то при голосовании по следующему вопросу он выберет этот же вариант. А если они выбрали два разных варианта, то при голосовании по следующему вопросу гном выберет третий вариант. Известно, что по вопросу «Блестит ли золото?» все гномы проголосовали «за», а по вопросу «Страшен ли Дракон?» Торин воздержался. Сколько могло быть гномов? (Опишите все возможности и докажите, что других нет.)

1.2. (*Всеросс., 2019, МЭ, 9.6*) На саммит съехались 2018 политиков. Каждые двое собирались провести переговоры без свидетелей. В какой-то момент оказалось, что среди любых четверых найдётся такой, который уже поговорил с тремя остальными. Какое наибольшее количество переговоров осталось провести?

1.3. (*Всеросс., 2015, МЭ, 9.6*) Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать. (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

1.4. (*Всеросс., 2015, РЭ, 10.2*) На плоскости отметили все вершины правильного n-угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n-угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n-угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?

1.5. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 11.3*) Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежат одному хозяину. А среди любых пяти носков не больше трёх имеют одного хозяина. Сколько детей разбросало носки, и сколько носков принадлежит каждому ребенку?

1.6. (*Всеросс., 2019, МЭ, 11.1*) Число 890 обладает таким свойством: изменив любую его цифру на 1 (увеличив или уменьшив), можно получить число, кратное 11. Найдите наименьшее трехзначное число, обладающее таким же свойством.

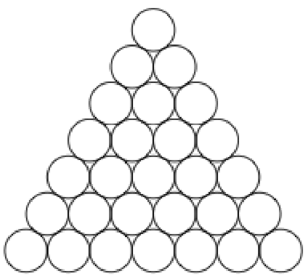
1.7. (*Всеросс., 2016, РЭ, 10.7, 11.7*) По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

1.8. (*Всеросс., 2016, ЗЭ, 9.6, 10.6*) Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

1.9. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 9.4*) На клетчатой доске $n \times n$ отметили несколько клеток таким образом, что левый нижний (L) и правый верхний (R) углы доски не отмечены, и любой путь коня из L в R обязательно содержит отмеченную клетку. При каких $n > 3$ можно заведомо утверждать, что найдутся три клетки, идущие подряд по диагонали, среди которых отмечено хотя бы две?

2 Московская математическая олимпиада

2.1. (*ММО, 2010, 8.2*) На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.



2.2. (*ММО, 2013, 8.4*) По кругу расставили 1000 чисел, среди которых нет нулей, и раскрасили их поочередно в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждое чёрное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним чёрных чисел. Чему может быть равна сумма всех расставленных чисел?

2.3. (*ММО, 2014, 11.4*) У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнает количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

3 Турнир городов

3.1. (*Турнир городов, 2015, 8–9.2*) Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи — болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоит снаружи базы, а часть — внутри. (Линия электропередач не проходит через вершины забора.) Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор всё время по правую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по левую руку от него (он их все видит). К моменту, когда шпион обошёл весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?

4 «Покори Воробьёвы горы!»

4.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.6, 9.5*) Написаны 2017 чисел. Известно, что сумма квадратов любых 7 из них равна 7, сумма любых 11 из них положительна, а сумма всех 2017 чисел делится на 9. Найдите эти числа.

4.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9.3*) Будем обозначать $\max(A, B, C)$ наибольшее из чисел A, B, C. Найдите наименьшее значение величины

$$\max\left(x^2 + |y|, (x+2)^2 + |y|, x^2 + |y-1|\right).$$

5 «Ломоносов»

5.1. (*«Ломоносов», 2015, 8.3, 9.4*) Все натуральные числа разбили на «хорошие» и «плохие» по следующим правилам:

1) из любого плохого числа можно вычесть некоторое натуральное число, не превосходящее его половины, так, чтобы получившаяся разность стала хорошей;

2) из хорошего числа нельзя вычесть не более половины так, чтобы оно осталось хорошим.

Известно, что число 1 — хорошее. Найдите ближайшее к 2015 хорошее число.

5.2. (*«Ломоносов», 2011, 8.8, 9.7*) Петя и Ваня составили из кубиков столбики по четыре кубика в каждом, но действовали по разным правилам: у Пети в каждом столбике есть кубики красного, жёлтого, зелёного и синего цветов, а у Вани — только красного, жёлтого и зелёного цветов. Оказалось, что все составленные столбики между собой различны, причём ни Петя, ни Ваня, следуя своим правилам, новых столбиков составить не могут. Кто из мальчиков составил больше столбиков и во сколько раз?

6 «Высшая проба»

6.1. (*«Высшая проба», 2015, 7.4, 8.3*) Петя, Саша и Миша играют в теннис на вылет. Игра на вылет означает, что в каждой партии играют двое, а третий ждёт. Проигравший партию уступает место третьему и в следующей партии сам становится ждущим. Петя сыграл всего 12 партий, Саша — 7 партий, Миша — 11 партий. Сколько раз Петя выиграл у Саши?

6.2. (*«Высшая проба», 2014, 7.6, 8.5*) Вдоль берега круглого озера растут яблони. Петя и Вася начинают идти из точки A на берегу в противоположных направлениях вдоль берега и считают все яблони, встретившиеся им на пути, а также все яблоки, растущие на яблонях. Встретившись в некоторой точке B, они сверили результаты. Оказалось, что Петя насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивил этот результат, и они решили повторить эксперимент. Они отправились из точки B в тех же направлениях, что изначально, и встретились снова в точке C. Оказалось, что на пути от B до C Петя опять насчитал вдвое больше яблонь чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивление стало ещё больше, и они опять решили повторить эксперимент. Отправившись из C в тех же направлениях, они встретились в точке D. Оказалось, что Петя опять насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася. Кто из них на пути от C до D насчитал больше яблок и во сколько раз?

6.3. (*«Высшая проба», 2016, 7–9.6*) Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек «вверх», «вниз», «влево» и «вправо», причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку «вверх», а если это запрещено (слово начинается с «вниз»), то убирает это первое «вниз»; ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку «вниз», «вправо», «влево». Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

6.4. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 11.4*) Центры трёх шаров с радиусами 1, 2, 3 образуют правильный треугольник со стороной 100500. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC таких, что точка A лежит в первом шаре, точка B — во втором шаре, а точка C — в третьем шаре.

6.5. (*«Высшая проба», 2020, 9–11.5*) Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.

6.6. (*«Высшая проба», 2018, 10.6*) На плоскости задан конечный набор равных кругов. Известно, что для любых 4 кругов есть прямая, пересекающая некоторые 3 из них. Докажите, что существует 12 прямых, таких что каждый круг пересекается хотя бы с одной из них.

6.7. (*«Высшая проба», 2014, 10.6, 11.5*) Пусть $p > 2$ — целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что

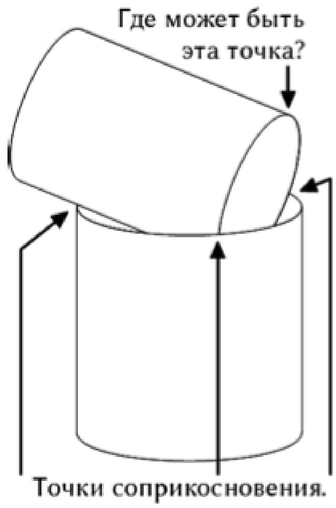
$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \frac{p}{2}$$

и произведение

$$\frac{p-a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p-a_2}{|a_2|} \cdot \ldots \cdot \frac{p-a_k}{|a_k|}$$

равно 3^m для некоторого натурального m.

6.8. (*«Высшая проба», 2013, 11.6*) Даны два высоких цилиндрических стакана радиусов r и R, $r < R$. Широкий поставили на горизонтальный стол, а узкий всевозможными способами помещают на него так, что он опирается на кромку широкого двумя точками своей кромки и одной точкой боковой поверхности (см. рисунок). Опишите геометрическое место точек пространства, в которых при этом может оказаться верхняя точка кромки узкого стакана, соприкасающейся с широким.



6.9. (*«Высшая проба», 2015, 11.6*) В пространстве даны 270 шаров равных радиусов, любые два из которых пересекаются. Докажите, что среди них можно выбрать 10 шаров так, что найдётся точка, принадлежащая всем выбранным шарам.

7 ОММО

7.1. (*ОММО, 2014.2*) Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых тридцати пяти из них меньше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел меньше единицы.

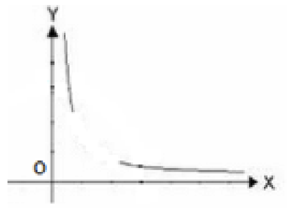
7.2. (*ОММО, 2016, 9–10.5*) У Пети имеется 50 шариков трёх цветов: красные, синие и зелёные. Известно, что среди любых 34 шариков есть хотя бы один красный; среди любых 35 — синий; среди любых 36 — зелёный. Сколько шариков зелёного цвета может быть у Пети?

8 «Курчатов»

8.1. (*«Курчатов», 2016, 8.5*) Через точку с координатами $(2, 2)$ проведены прямые (включая две параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 18°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 2016 - x$.

8.2. (*«Курчатов», 2016, 10.4*) Через точку с координатами $(10, 9)$ проведены прямые (включая параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 10°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 101 - x$.

8.3. (*«Курчатов», 2014, 9.5*) На плоскости нарисованы оси координат и график функции $y = 2/x$ при $x > 0$. Масштаб не указан, но известно, что он по обеим осям одинаков. К сожалению, небольшой кусок графика вблизи начала координат был нечаянно стёрт (см. рисунок) С помощью циркуля и линейки восстановите на данном графике точку с абсциссой 1.



8.4. (*«Курчатов», 2014, 10.3*) На плоскости нарисованы оси координат и график функции $y = \frac{2}{x}$. Масштаб не указан, но известно, что он по обеим осям одинаков. С помощью циркуля и линейки постройте на данном графике точку, у которой абсцисса положительна и на 2 меньше ординаты.

8.5. (*«Курчатов», 2017, 11.4*) Каждый день более половины жителей Цветочного города едят мороженое. Докажите, что найдётся 10 жителей Цветочного города, таких, что в течение каждого из последних 2017 дней хотя бы один из них ел мороженое. (В Цветочном городе живет не менее 10 жителей.)