

Рациональные и иррациональные числа

1. (Всеросс., 2016, МЭ, 11.1) Существует ли такое натуральное число n , большее 1, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.1) Найдите все пары натуральных чисел $x, y \in [1; 8]$, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{xx, xxx\dots} = y, yyy\dots$$

(десятичная запись каждого из чисел $xx, xxx\dots$ и $y, yyy\dots$ состоит из бесконечного количества одинаковых цифр).

(1, 3) и (4, 6)

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.1) В периодической десятичной дроби $0,242424\dots$ первую цифру после запятой заменили на 4. Во сколько раз полученное число больше исходного?

В $\frac{40}{73}$ раз

4. («Ломоносов», 2011, 8.7, 9.4) Число $\frac{1711}{2011}$ обратили в бесконечную десятичную дробь, затем стёрли первую цифру после запятой и обратили получившуюся десятичную дробь в обыкновенную. Какую дробь получили?

1022
2011

5. Докажите, что число $\sqrt{2}$ иррационально.

6. (Всеросс., 2000, ОЭ, 8.1) Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2(a^6 + b^6).$$

Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.

7. («Курчатов», 2018, 10.3) Существует ли набор чисел x_1, x_2, \dots, x_{99} такой, что каждое из них равно $\sqrt{2} + 1$ или $\sqrt{2} - 1$ и выполняется равенство

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_1 = 199?$$

8. (ОММО, 2016, 9–10.6) Найдите все действительные числа x такие, что оба числа $x + \sqrt{3}$ и $x^2 + \sqrt{3}$ — рациональные.

9. («Ломоносов», 2017, 10–11.5) Вычислите $\sqrt{n} + \sqrt{n + 524}$, если известно, что это число рациональное и что n — натуральное.

262

10. (ОММО, 2013.9) Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по рёбрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

11. («Высшая проба», 2014, 10.2) Действительные числа a, b и c таковы, что числа ab, bc, ca — рациональные. Докажите, что существуют такие целые числа x, y, z , не равные одновременно нулю, что $ax + by + cz = 0$.

12. («Высшая проба», 2020, 9–10.4) Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины всех рёбер иррациональны, а объём, полная поверхность и большая диагональ — числа целые? (Прямоугольный параллелепипед — это фигура в пространстве, задаваемая неравенствами $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$, где $a, b, c > 0$ — фиксированные числа. Большая диагональ — это максимальное расстояние между вершинами параллелепипеда.)

13. («Курчатов», 2016, 11.6) Дан квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$. Докажите, что найдётся такое иррациональное x , при котором значение $x^2 + bx + c$ рационально.

14. (Всеросс., 2014, РЭ, 9.5) Число x таково, что среди четырёх чисел

$$x - \sqrt{2}, \quad x - \frac{1}{x}, \quad x + \frac{1}{x}, \quad x^2 + 2\sqrt{2}$$

ровно одно не является целым. Найдите все такие x .

15. (Всеросс., 2017, РЭ, 9.5) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

16. (Всеросс., 2017, РЭ, 10.5) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по ненулевому числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

17. (Всеросс., 2017, РЭ, 11.5) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

18. (Всеросс., 2003, ЗЭ, 9.1) Числовое множество M , содержащее 2003 различных числа, таково, что для каждых двух различных элементов a, b из M число $a^2 + b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ рационально.

19. (Всеросс., 2005, ЗЭ, 9.5) Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.
20. (Всеросс., 2016, РЭ, 11.1) Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трёхчлена $f(x)$ быть рациональным?
21. (Всеросс., 2014, РЭ, 11.5) Числа x , y и z таковы, что все три числа $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.
22. (Всеросс., 2002, ОЭ, 11.1) Действительные числа x и y таковы, что для любых различных простых нечётных p и q число $x^p + y^q$ рационально. Докажите, что x и y — рациональные числа.
23. (Всеросс., 2006, ОЭ, 10.7) При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b , что оба числа $a + b$ и $a^n + b^n$ — целые?
24. (Всеросс., 2003, ЗЭ, 10.1) Числовое множество M , содержащее 2003 различных положительных числа, таково, что для любых трёх различных элементов a , b , c из M число $a^2 + bc$ рационально. Докажите, что можно выбрать такое натуральное n , что для любого a из M число $a\sqrt{n}$ рационально.
25. (Всеросс., 2004, ЗЭ, 10.5) Последовательность неотрицательных рациональных чисел a_1, a_2, a_3, \dots удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n . Докажите, что не все её члены различны.
26. (Всеросс., 2018, РЭ, 11.4) Изначально на доску выписали числа $1 - \sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x , y и z , а вместо них на доску записываются числа $x^2 + xy + y^2$, $y^2 + yz + z^2$ и $z^2 + zx + x^2$. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными?
27. (Всеросс., 2014, ЗЭ, 9.7, 10.7) В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k . При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?
28. (Всеросс., 1999, ЗЭ, 11.2) Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдётся такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.
29. (Всеросс., 2006, ЗЭ, 11.2) Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей — чисто периодические дроби с периодом T . Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше T .
30. (Всеросс., 2014, ЗЭ, 11.3) Положительные рациональные числа a и b записаны в виде десятичных дробей, у каждой из которых минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a - b$ длина минимального периода равна 15. При каком наименьшем натуральном k длина минимального периода десятичной записи числа $a + kb$ может также оказаться равной 15?

31. (ММО, 1993, 10.1) При разложении чисел A и B в бесконечные десятичные дроби длины минимальных периодов этих дробей равны 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода числа $A + B$?

32. (ММО, 1994, 10.2, 11.2) Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями:

$$x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|,$$

причём $0 \leq x_1 \leq 1$. Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая а) в том б) и только в том случае, когда x_1 рационально.

33. (ММО, 1998, 11.2) Про непрерывную функцию f известно, что:

- 1) f определена на всей числовой прямой;
 - 2) f в каждой точке имеет производную (и, таким образом, график f в каждой точке имеет единственную касательную);
 - 3) график функции f не содержит точек, у которых одна из координат рациональна, а другая — иррациональна.
- Следует ли отсюда, что график f — прямая?

34. (ММО, 2007, 10.6) С ненулевым числом разрешается проделывать следующие операции:

$$x \mapsto \frac{1+x}{x}, \quad x \mapsto \frac{1-x}{x}.$$

Верно ли, что из каждого ненулевого рационального числа можно получить каждое рациональное число с помощью конечного числа таких операций?

35. (ММО, 2020, 11.5) Кузнечик прыгает по числовой прямой, на которой отмечены точки $-a$ и b . Известно, что a и b — положительные числа, а их отношение иррационально. Если кузнечик находится в точке, которая ближе к $-a$, то он прыгает вправо на расстояние, равное a . Если же он находится в середине отрезка $[-a; b]$ или в точке, которая ближе к b , то он прыгает влево на расстояние, равное b . Докажите, что независимо от своего начального положения кузнечик в некоторый момент окажется от точки 0 на расстоянии, меньшем 10^{-6} .

36. (Турнир городов, 2005, 8–9) Назовём треугольник *рациональным*, если все его углы измеряются рациональным числом градусов. Назовём точку внутри треугольника *рациональной*, если при соединении её отрезками с вершинами мы получим три рациональных треугольника. Докажите, что внутри любого остроугольного рационального треугольника найдутся как минимум три различные рациональные точки.

37. (Турнир городов, 1996, 10–11) Дано n чисел, p — их произведение. Разность между p и каждым из этих чисел — нечётное число. Докажите, что все данные n чисел иррациональны.

38. (Турнир городов, 1995, 10–11) Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка — точка, у которой все три декартовы координаты — рациональные числа.)