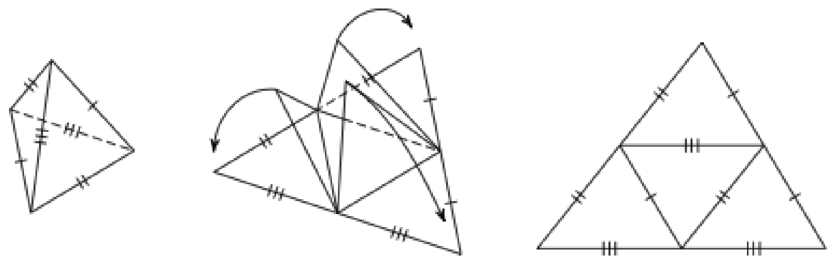
Развёртки

Задача 1. (*Турнир городов, 2004, 8–11*) Дана коробка (прямоугольный параллелепипед), по поверхности (но не внутри) которой ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол? (Расстоянием между двумя точками считаем длину соединяющего их кратчайшего пути по *поверхности параллелепипеда.*)

Задача 2. (*Турнир городов, 2004, 10–11*) Бумажный тетраэдр разрезали по трём рёбрам, не принадлежащим одной грани. Могло ли случиться, что полученную развёртку нельзя расположить на плоскости без самопересечений (в один слой)?

Задача 3. (*Всеросс. по геометрии, 2006, 10*) Может ли развёртка тетраэдра оказаться треугольником со сторонами 3, 4 и 5 (тетраэдр можно резать только по рёбрам)?

Задача 4. (*ММО, 2013, 11*) Известно, что всякую треугольную пирамиду, противоположные рёбра которой попарно равны, можно так разрезать вдоль трёх её ребер и развернуть, чтобы ее развёрткой стал треугольник без внутренних разрезов (см. рисунок).



Найдётся ли ещё какой-нибудь выпуклый многогранник, который можно так разрезать вдоль нескольких его рёбер и развернуть, чтобы его развёрткой стал треугольник без внутренних разрезов?

Задача 5. (*Всеросс., 1997, финал, 10*) Квадрат $n \times n$ ($n \geqslant 3$) склеен в цилиндр. Часть клеток покрашена в чёрный цвет. Докажите, что найдутся две параллельных линии (две горизонтали, две вертикали или две диагонали), содержащие одинаковое количество чёрных клеток.

Задача 6. (*Всеросс., 2007, финал, 10*) Грани куба $9 \times 9 \times 9$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечётно.

Задача 7. (*Всеросс., 1997, округ, 10–11*) Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить три его грани, имеющие общую вершину, шестнадцатью бумажными прямоугольными полосками размером 1×3?

Задача 8. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2008, 10–11*) Есть два платка: один в форме квадрата, другой — в форме правильного треугольника, причём их периметры одинаковы. Существует ли многогранник, который можно полностью оклеить этими двумя платками без наложений (платки можно сгибать, но нельзя резать)?