Разбиения на пары и группы

1. (*«Курчатов», 2019, 8*) На танцевальный вечер пришло n пар партнеров, каждая пара — это девушка и юноша. Вечер состоит из не менее чем n танцев, в каждом из которых участвуют все пришедшие. Изначально юноши рассаживаются за круглым столом. На первый танец каждая девушка приглашает одного из юношей (не обязательно своего партнера). После танца девушка проводит юношу, с которым она танцевала, к его месту за столом, и на следующий танец приглашает следующего за ним юношу против часовой стрелки. Для каких n можно рассадить юношей за столом и указать пары для первого танца так, чтобы в каждом танце хотя бы одна девушка танцевала с партнером, с которым пришла на вечер?

2. (*ММО, 2020, 9.4*) К Ивану на день рождения пришли $3n$ гостей. У Ивана есть $3n$ цилиндров с написанными сверху буквами А, Б и В, по n штук каждого типа. Иван хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или больше) так, чтобы длина каждого хоровода делилась на 3, и при взгляде на любой хоровод сверху читалось бы по часовой стрелке АБВАБВ. . . АБВ. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(3n)!$ различными способами. (Цилиндры с одинаковыми буквами неразличимы; все гости различны.)

3. (*«Курчатов», 2018, 11*) Вершины правильного 100-угольника раскрашены случайным образом в два цвета: 50 вершин — в белый цвет, 50 — в черный. Докажите, что можно разбить все вершины на 25 групп по 4 вершины так, чтобы в каждой группе было по две вершины каждого цвета, и вершины каждой группы являлись вершинами некоторого прямоугольника.

4. (*Олимпиада им. Эйлера, финал, 2019.8*) Дано натуральное число k. В городе несколько детей, они ходят в несколько кружков. Известно, что в каждый кружок ходит не более $3k$ детей, любой ребёнок ходит ровно в три кружка, и для любых двух детей есть кружок, в которой оба они ходят. Какое наибольшее количество детей может быть в городе?

5. (*ММО, 2020, 10.5*) На доске написаны 1000 последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся 1000 последовательных целых чисел.

6. (*ММО, 2020, 11.6*) На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на сумму и разность чисел этой пары (не обязательно вычитать из большего числа меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел.