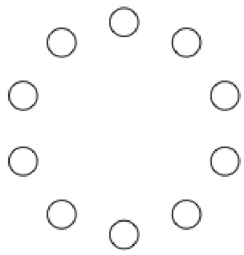
Разбиения на пары и группы

1. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 7.1*) В мешке лежали карточки с числами от 1 до 20. Влад вытащил 6 карточек и сказал, что все эти карточки можно разбить на пары так, что суммы чисел в каждой паре одинаковые. Лена успела подсмотреть 5 карточек Влада: на них были написаны числа 2, 4, 9, 17, 19. Карточку с каким числом не успела подсмотреть Лена? (Достаточно привести один подходящий ответ.)

2. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 7.4*) а) Разбейте натуральные числа от 1 до 10 на пары так, чтобы разность чисел в каждой паре была равна 2 или 3.

б) Можно ли натуральные числа от 1 до 2014 разбить на пары так, чтобы разность чисел в каждой паре была 2 или 3?

3. (*Математический праздник, 1999, 6.3*) Расположите в кружочках (вершинах правильного десятиугольника) числа от 1 до 10 так, чтобы для любых двух соседних чисел их сумма была равна сумме двух чисел, им противоположных (симметричных относительно центра окружности).



4. (*«Курчатов», 2017, 6.5*) В клубе любителей чая состоят 20 джентльменов. У каждого джентльмена ровно 13 друзей среди остальных членов клуба. Совет клуба состоит из 10 наиболее выдающихся любителей чая, которые дружат каждый с каждым. Докажите, что весь клуб можно разделить на две группы так, чтобы в каждой из групп любые двое были друзьями.

5. (*«Курчатов», 2017, 7.4*) На конференцию по вопросам применения магии в народном хозяйстве прибыли 30 волшебников, каждый из которых знаком ровно с 19 участниками конференции. Оказалось, что 15 самых могущественных волшебников знакомы друг с другом, каждый с каждым. Докажите, что всех волшебников можно рассадить за два стола так, чтобы любые два волшебника, сидящие за одним столом, были знакомы друг с другом.

6. (*Математический праздник, 2009, 6.6*) а) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в шести сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну в эти два сундука. Ещё он заметил, что если открыть любые 3, 4 или 5 сундуков, то тоже можно переложить лежащие в них монеты таким образом, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга так и не узнал, можно ли разложить все монеты поровну по всем шести сундукам. Можно ли, не заглядывая в заветные сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

б) А если сундуков было восемь, а Скупой рыцарь мог разложить поровну монеты, лежащие в любых 2, 3, 4, 5, 6 или 7 сундуках?

7. (*Московская устная олимпиада, 2015, 7.3*) Из натуральных чисел от 1 до 100 выбрано 50 различных. Оказалось, что сумма никаких двух из них не равна 100. Верно ли, что среди выбранных чисел всегда найдётся квадрат какого-нибудь целого числа?

8. (*Математический праздник, 2009, 7.4*) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, ..., или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

9. (*Турнир Архимеда, 2015.4*) В один прекрасный день каждый из 2015 гномов обиделся на какого-то другого гнома (одного), и на каждого гнома обиделся какой-то другой гном (один). Белоснежке требуется распределить гномов на три группы так, чтобы в каждой из групп не было гномов, обиженных на кого-нибудь из данной группы. Всегда ли это возможно? Ответ обоснуйте.

10. (*Московская устная олимпиада, 2013, 7.4*) Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 24 карточки, пронумерованные числами от 1 до 24. Он выбирает из них 13 карточек и передает первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 11 карточек и, перемешав, передает эти три карточки второму фокуснику. Каким образом фокусники могут договориться так, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?