Метод рационализации

Метод рационализации — это весьма мощная процедура, позволяющая в определённых случаях упростить неравенство и свести его к *рациональному* неравенству (которое решается методом интервалов).

Предположим, что имеется *монотонно возрастающая* функция $f(x)$. Пусть числа a и b принадлежат области определения данной функции. Тогда справедливы следующие утверждения.

- Неравенство $f(a) > f(b)$ эквивалентно неравенству $a > b$; иными словами, неравенство $f(a) - f(b) > 0$ эквивалентно неравенству $a - b > 0$.

- Аналогично, неравенство $f(a) - f(b) < 0$ эквивалентно неравенству $a - b < 0$.

Сформулируем оба этих утверждения короче: *если $f(x)$ — монотонно возрастающая функция, то разность $f(a) - f(b)$ совпадает по знаку с разностью $a - b$.*

Как работает эта идея применительно к решению неравенств? Пусть, например, имеется неравенство

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(b)} > 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — монотонно возрастающие функции. Тогда разность $f(x)-f(a)$ можно заменить разностью $x - a$ (того же знака), а разность $g(x) - g(b)$ можно заменить разностью $x - b$ (того же знака). Получим рациональное неравенство

$$\frac{x - a}{x - b} > 0, \tag{2}$$

решаемое методом интервалов.

При этом неравенство (2) является *следствием* неравенства (1). Это означает, что неравенство (2) содержит все решения неравенства (1) и, возможно, некоторые другие решения. Чтобы отфильтровать лишние решения, нужно множество решений неравенства (2) пересечь с областью определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Давайте рассматривать конкретные задачи — они дадут лучшее представление о том, как нужно применять метод рационализации. Начнём с задачи, разобранной в конце предыдущей статьи «Логарифмические уравнения и неравенства».

Задача 1. Решить неравенство:

$$\log_{x^2}(x + 2) < 1. \tag{3}$$

Решение. Перейдём в неравенстве (3) к какому-нибудь постоянному основанию. Например, к основанию 10:

$$\frac{\lg(x + 2)}{\lg x^2} < 1.$$

Чтобы применить метод рационализации, нам в правой части необходим нуль. Переносим единицу влево:

$$\frac{\lg(x + 2)}{\lg x^2} - 1 < 0,$$

или

$$\frac{\lg(x + 2) - \lg x^2}{\lg x^2} < 0.$$

В числителе получилась разность логарифмов — это как раз то, что нам нужно. Не хватает разности логарифмов в знаменателе. Но такую разность мы легко организуем:

$$\lg x^2 = \lg x^2 - 0 = \lg x^2 - \lg 1.$$

Таким образом, наше неравенство принимает вид:

$$\frac{\lg(x+2) - \lg x^2}{\lg x^2 - \lg 1} < 0. \tag{4}$$

До сих пор мы совершали равносильные преобразования, так что неравенство (4) равносильно исходному неравенству (3).

Теперь мы замечаем, что в силу монотонного возрастания функции $y = \lg x$ числитель совпадает по знаку с разностью $(x+2) - x^2$, а знаменатель совпадает по знаку с разностью $x^2 - 1$. Поэтому неравенство (4) равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2-x^2}{x^2-1} < 0, \\ x+2 > 0, \\ x^2 > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Преобразуем первое неравенство системы (5):

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} > 0,$$

и решаем его методом интервалов:

$$x < -1, \quad -1 < x < 1, \quad x > 2. \tag{6}$$

Решения второго и третьего неравенств системы (5) — это множество

$$-2 < x < 0, \quad x > 0. \tag{7}$$

Остаётся пересечь множества (6) и (7).

Ответ: $(-2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (2;+\infty)$.

Как видите, метод рационализации избавляет нас от необходимости рассматривать два случая (основание логарифма больше/меньше единицы). И чем сложнее неравенство, тем более ощутимыми становятся преимущества метода рационализации.

Задача 2. (*МГУ, мехмат, 1998*) Решить неравенство:

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leqslant 0. \tag{8}$$

Решение. Переходим к основанию 10:

$$\frac{\lg(10x^2+x-2)}{\lg\frac{2x+2}{5x-1}} \leqslant 0.$$

Вычитаем в числителе и знаменателе $\lg 1 = 0$:

$$\frac{\lg(10x^2+x-2) - \lg 1}{\lg\frac{2x+2}{5x-1} - \lg 1} \leqslant 0. \tag{9}$$

Неравенство (9) равносильно исходному неравенству (8). Вместе с тем ввиду монотонного возрастания функции $y = \lg x$ неравенство (9) равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{(10x^2+x-2)-1}{\frac{2x+2}{5x-1}-1} \leqslant 0, \\ 10x^2+x-2>0, \\ \dfrac{2x+2}{5x-1}>0. \end{cases} \tag{10}$$

Преобразуем первое неравенство системы (10):

$$\frac{10x^2+x-3}{\frac{3-3x}{5x-1}} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)}{\frac{3(x-1)}{5x-1}} \geqslant 0,$$

и решаем его методом интервалов:

$$x \leqslant -\frac{3}{5}, \quad \frac{1}{5} < x \leqslant \frac{1}{2}, \quad x > 1. \tag{11}$$

Решения второго неравенства системы (10):

$$x < -\frac{1}{2}, \quad x > \frac{2}{5}. \tag{12}$$

Решения третьего неравенства системы (10):

$$x < -1, \quad x > \frac{1}{5}. \tag{13}$$

Остаётся пересечь множества (11), (12) и (13).

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

В рассмотренной задаче метод рационализации весьма серьёзно выигрывает в эффективности. Попробуйте решить данное неравенство, рассматривая два случая сравнения с единицей основания логарифма, — и сравните объём проделанной работы.

Метод рационализации можно применять не только к логарифмическим неравенствам.

Задача 3. (*МГУ, ДВИ, 2011*) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1} < 1.$$

Решение. Для начала выполним равносильные преобразования:

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}-1} < 0.$$

Вследствие монотонного возрастания функции $y = \sqrt{x}$ полученное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{(1-3x)-(2+x)}{(2+x)-1} < 0, \\ 1-3x \geqslant 0, \\ 2+x \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{4x+1}{x+1} > 0, \\ x \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$

Эта система решается легко.

Ответ: $[-2;-1) \cup \left(-\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$.

Задача 4. (*МГУ, мехмат, 2005*) Решить неравенство:

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4} - \cos\frac{x-5}{4}} \geqslant 0. \tag{14}$$

Решение. Заметим, что функция $y = \cos x$ монотонно возрастает на отрезке $[-\pi;0]$ (рис. 1). Этот факт пригодится нам при решении задачи.

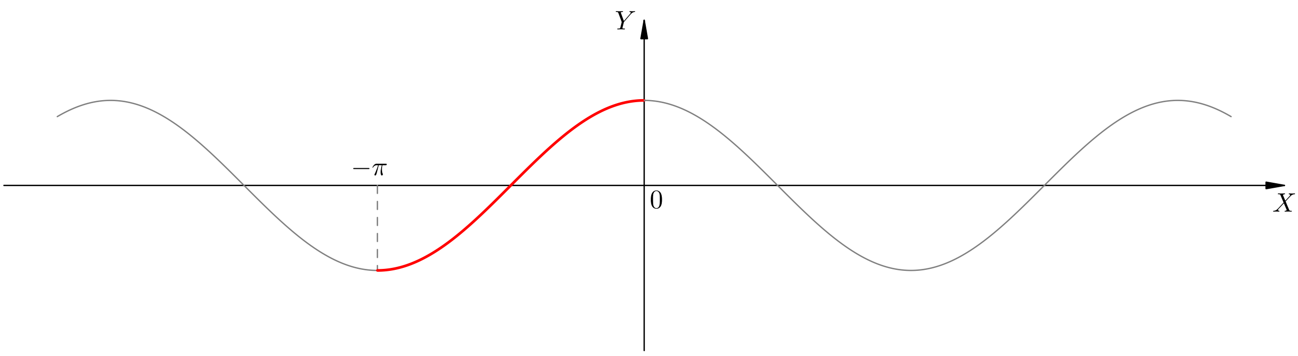

Рис. 1. График функции $y = \cos x$

Решения уравнения (14) удовлетворяют условию $5 - x^2 \geqslant 0$, то есть

$$-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}\,. \tag{15}$$

Для аргумента первого косинуса в знаменателе (14) имеем тогда следующую оценку:

$$\frac{-2\sqrt{5}-7}{4} \leqslant \frac{2x-7}{4} \leqslant \frac{2\sqrt{5}-7}{4}\,.$$

Замечаем, что:

$$\frac{-2\sqrt{5}-7}{4} = \frac{-\sqrt{20}-7}{4} > \frac{-\sqrt{25}-7}{4} = \frac{-5-7}{4} = -3 > -\pi;$$
$$\frac{2\sqrt{5}-7}{4} = \frac{\sqrt{20}-\sqrt{49}}{4} < 0.$$

Таким образом, из неравенства (15) следует неравенство

$$-\pi < \frac{2x-7}{4} < 0. \tag{16}$$

Получим аналогичную оценку для аргумента второго косинуса. Из (15) следует, что

$$\frac{-\sqrt{5}-5}{4} \leqslant \frac{x-5}{4} \leqslant \frac{\sqrt{5}-5}{4}\,.$$

С одной стороны,

$$\frac{-\sqrt{5}-5}{4} > \frac{-3-5}{4} = -2 > -\pi.$$

С другой стороны,

$$\frac{\sqrt{5}-5}{4} < 0.$$

Следовательно,

$$-\pi < \frac{x-5}{4} < 0. \tag{17}$$

Ввиду оценок (16), (17) и монотонного возрастания косинуса на отрезке $[-\pi; 0]$ исходное неравенство (14) равносильно неравенству

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\frac{2x-7}{4}-\frac{x-5}{4}} \geqslant 0,$$

то есть

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{x-2} \geqslant 0.$$

Заметим ещё, что в силу (15) имеем:

$$3-x+\sqrt{5-x^2} \geqslant 3-x \geqslant 3-\sqrt{5} > 0.$$

Это позволяет использовать для упрощения неравенства полезный приём: «домножим на сопряжённое», то есть умножим числитель и знаменатель на $3-x+\sqrt{5-x^2}$. Получим цепочку равносильных преобразований:

$$\frac{\left(3-x-\sqrt{5-x^2}\,\right)\left(3-x+\sqrt{5-x^2}\,\right)}{(x-2)\left(3-x+\sqrt{5-x^2}\right)} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(3-x)^2-(5-x^2)}{(x-2)\left(3-x+\sqrt{5-x^2}\right)} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2-6x+4}{(x-2)\left(3-x+\sqrt{5-x^2}\right)} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-3x+2}{x-2} \geqslant 0$$

(заключительный переход совершён на множестве (15) и обусловлен положительностью выражения $3-x+\sqrt{5-x^2}$ на этом множестве). Последнее неравенство приводится к виду

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-2} \geqslant 0$$

и легко решается методом интервалов:

$$1 \leqslant x < 2, \quad x > 2. \tag{18}$$

Остаётся пересечь множество (18) с множеством (15).

Ответ: $[1;2) \cup \left(2;\sqrt{5}\,\right]$.

В следующей статье «Задача C3 на ЕГЭ по математике» вы найдёте дальнейшие применения метода рационализации.