Квадратные уравнения

Содержание

В данной статье мы разберём основные вопросы, связанные с квадратным уравнением: выведем формулу корней, докажем теорему Виета и научимся раскладывать квадратный трёхчлен на множители.

Квадратное уравнение — это уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{1}$$

Числа a, b и c называются *коэффициентами* уравнения (1). Выражение ax^2+bx+c, в котором $a \neq 0$, называется *квадратным трёхчленом*.

1 Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение (1) называется неполным, если $b = 0$ или $c = 0$. В этих тривиальных случаях совершенно ясно, как надо действовать.

Задача 1. Решить уравнение $2x^2 - 5 = 0$.

Решение. Имеем:

$$2x^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\,.$$

Задача 2. Решить уравнение $x^2 + 3x = 0$.

Решение. Имеем:

$$x(x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = 0, \\ &x = -3. \end{aligned}\right.$$

2 Выделение полного квадрата

Любое квадратное уравнение можно решить, не помня формулу корней. Для этого нужно выделить полный квадрат.

Задача 3. Решить уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Решение. Прибавим к обеим частям по 9:

$$x^2 + 4x + 4 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x + 2 = 3, \\ &x + 2 = -3 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = 1, \\ &x = -5. \end{aligned}\right.$$

Задача 4. Решить уравнение $2x^2 - 9x + 3 = 0$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 2:

$$4x^2 - 18x = -6 \quad \Leftrightarrow \quad (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} - 6 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(2x - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{57}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - \frac{9}{2} = \pm\frac{\sqrt{57}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{4}.$$

Задача 5. Решить уравнение $x^2 + 5x + 7 = 0$.

Решение. Имеем:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 7 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Решений нет.

3 Формула корней

Процедуру выделения полного квадрата можно применить к уравнению (1) в общем случае. Именно так получается хорошо известная вам формула вычисления корней квадратного уравнения. Имеем:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2x^2 + abx + ac = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (ax)^2 + 2ax \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac \quad \Leftrightarrow \quad \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}.$$

Величина $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* уравнения (1). Таким образом,

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{D}{4}. \tag{2}$$

В зависимости от значения дискриминанта возможны три случая.

1. $D < 0$. Тогда уравнение (2) не имеет корней. Следовательно, не имеет корней и равносильное ему уравнение (1).

2. $D = 0$. Тогда уравнение (2) — а значит, и уравнение (1) — имеет единственный корень:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + \frac{b}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{b}{2a}.} \tag{3}$$

3. $D > 0$. Тогда уравнение (2) — а значит, и уравнение (1) — имеет два различных корня:

$$ax + \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.} \tag{4}$$

Формула (4) как раз и есть формула корней квадратного уравнения (1). Легко видеть, что формула (3) является её частным случаем при $D = 0$.

4 Упрощённая формула корней при чётном b

При $b = 2k$ возникает полезная модификация формулы (4). Рассмотрим уравнение

$$ax^2 + 2kx + c = 0. \tag{5}$$

Его дискриминант:

$$D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac).$$

Тогда формула (4) даёт:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}\,.$$

Это и есть формула для корней уравнения (5). Учитывая ещё, что $k^2 - ac = D/4$, запишем эту формулу в виде:

$$\boxed{x = \frac{-k \pm \sqrt{D/4}}{a}\,.} \tag{6}$$

Знать эту формулу очень рекомендуется — она поможет вам сэкономить драгоценное время на экзамене.

Задача 6. Решить уравнение $3x^2 + 26x - 64 = 0$.

Решение. Здесь $k = 13$, так что имеем:

$$D/4 = 13^2 + 3 \cdot 64 = 169 + 192 = 361 = 19^2,$$

откуда

$$x = \frac{-13 \pm 19}{3}\,; \quad x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{32}{3}\,.$$

Вычисления по формуле (4) были бы сложнее, в чём вы сами легко можете убедиться.

5 Теорема Виета

Оказывается, корни квадратного уравнения связаны с его коэффициентами весьма простыми соотношениями.

Теорема Виета. Пусть квадратное уравнение $ax^2+bx+c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 (допускается и случай $x_1 = x_2$ при $D = 0$). Тогда справедливы *формулы Виета*:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Формулы Виета доказываются прямым вычислением с помощью формулы корней (4):

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}\,;$$

$$x_1x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}\,.$$

Теорему Виета можно переформулировать так: если хотя бы одна из формул Виета (7) не выполнена, то хотя бы одно из чисел x_1, x_2 не является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Это удобно использовать для проверки корней, вычисленных по формулам (4) или (6). Пусть, например, требуется решить уравнение

$$3x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Применяя стандартную процедуру, находим:

$$D/4 = 1 + 3 \cdot 8 = 25; \quad x = \frac{-1 \pm 5}{3}\,; \quad x_1 = \frac{4}{3}\,,\ x_2 = -2.$$

После этого полезно потратить несколько секунд и проверить формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}\,,$$

что как раз и равно $-b/a$; также

$$x_1 x_2 = \frac{4}{3} \cdot (-2) = -\frac{8}{3}\,,$$

что как раз и равно c/a. А вот если бы одна из формул Виета дала неверный результат, то это означало бы, что при вычислении корней где-то допущена ошибка.

Возьмите за правило каждый раз делать в уме такую проверку — это очень полезная привычка. Часто бывает так, что квадратное уравнение является звеном решения более сложной задачи, и ошибка при нахождении корней автоматически делает неверным всё дальнейшее решение. Теорема Виета в таких ситуациях — важная промежуточная страховка.

Однако формулы Виета годятся не только в качестве теста на отсутствие вычислительной ошибки — сфера их применения гораздо шире. В частности, с помощью формул Виета можно искать корни!

Обратная теорема Виета. Пусть числа a, b, c, x_1 и x_2 связаны соотношениями

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}\,.$$

Тогда x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Доказательство. Выразим x_2 из первой формулы Виета:

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1,$$

и подставим во вторую:

$$x_1\left(-\frac{b}{a} - x_1\right) = \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + \frac{b}{a}x_1 + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

Как видим, x_1 является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. То же самое верно и для x_2 (это очевидно и без вычислений, поскольку x_1 и x_2 входят в формулы Виета симметрично).

Задача 7. Решить уравнение $x^2 - 35x + 124 = 0$.

Решение. Давайте попробуем найти два числа, сумма которых равна 35, а произведение равно 124. Вот они: 31 и 4. В силу обратной теоремы Виета это и есть корни данного уравнения.

Задача 8. Решить уравнение $x^2 + 2013x - 2014 = 0$.

Решение. Вычислять здесь дискриминант и пользоваться формулой корней — не самое приятное занятие. Но это и не нужно. Легко видеть, что $x_1 = 1$ является корнем данного уравнения. Тогда второй корень находится из формул Виета: $x_2 = -2014$.

К сожалению, подбор корней с помощью формул Виета проходит лишь тогда, когда корни «хорошие» (то есть когда дискриминант является точным квадратом). Например, найти подбором корни уравнения $x^2 + 7x + 3 = 0$ почти нереально, так как они иррациональны ($D = 37$). А в случае уравнения $x^2 + 7x + 13 = 0$ корни можно подбирать до бесконечности — их вообще нет (дискриминант отрицателен).

Рассмотрим ещё несколько задач на теорему Виета.

Задача 9. Не решая уравнения $2x^2 - 7x + 4 = 0$, найти сумму квадратов его корней.

Решение. Дискриминант равен 17, так что корни x_1 и x_2 существуют. Имеем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{2} = \frac{33}{4}\,.$$

Задача 10. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 3x - 5 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $1/x_1$ и $1/x_2$.

Решение. Обозначим $t_1 = 1/x_1$ и $t_2 = 1/x_2$. Имеем:

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}\,; \qquad t_1t_2 = \frac{1}{x_1x_2} = -\frac{1}{5}\,.$$

Следовательно, искомое квадратное уравнение имеет вид

$$0 = t^2 - (t_1 + t_2)t + t_1t_2 = t^2 - \frac{3}{5}t - \frac{1}{5}$$

или, домножая на 5,

$$5t^2 - 3t - 1 = 0.$$

Задача 11. (*МГУ, мехмат, 2007*) Графики двух функций

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 3 \quad \text{и} \quad g(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

Решение. Абсциссы точек пересечения удовлетворяют уравнению $f(x) = g(x)$, то есть

$$2x^2 + 2x - 3 = -3x^2 - 2x + 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; 5x^2 + 4x - 4 = 0. \tag{8}$$

Дискриминант квадратного уравнения (8) положителен, поэтому оно имеет два различных корня x_1 и x_2 (что, собственно, и сказано в условии). Оба они иррациональны, и вычисление координат точек пересечения с последующим нахождением уравнения прямой, проходящей через эти точки, приведёт к громоздким вычислениям.

Будем действовать по-другому. В силу теоремы Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{5}\,, \quad x_1x_2 = -\frac{4}{5}\,.$$

Теперь учтём, что через точки пересечения, имеющие координаты $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, проходит прямая $y = ax + b$:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 2x_1 - 3 = ax_1 + b, \\ 2x_2^2 + 2x_2 - 3 = ax_2 + b. \end{cases} \tag{9}$$

Вычтем из первого уравнения системы (9) второе:

$$2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = a(x_1 - x_2);$$

сокращая полученное равенство на ненулевое число $x_1 - x_2$, получим

$$a = 2(x_1 + x_2) + 2 = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 2 = \frac{2}{5}\,.$$

Подставим найденное значение a в систему (9) и сложим уравнения друг с другом:

$$2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 2(x_1 + x_2) - 6 = \frac{2}{5}(x_1 + x_2) + 2b,$$

откуда

$$b = x_1^2 + x_2^2 + \frac{4}{5}(x_1 + x_2) - 3 =$$
$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + \frac{4}{5}(x_1 + x_2) - 3 = \frac{16}{25} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{16}{25} - 3 = -\frac{7}{5}\,.$$

Ответ: $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{7}{5}$.

Задача 12. (*«Высшая проба», 2014, 10*) Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — различные корни уравнения

$$x^4 - 2^{121}x^2 + 121 = 0,$$

идущие в порядке возрастания, т. е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Найдите значение выражения

$$-\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}\,.$$

Решение. Заменой $t = x^2$ уравнение приводится к квадратному:

$$t^2 - 2^{121}t + 121 = 0 \tag{10}$$

Дискриминант уравнения (10) положителен, поэтому оно имеет два различных корня t_1 и t_2. Из равенств $t_1 + t_2 = 2^{121}$, $t_1t_2 = 121$ следует, что оба этих корня положительны. Пусть для определённости $t_1 < t_2$. Тогда

$$x_1 = -\sqrt{t_2}\,, \quad x_2 = -\sqrt{t_1}\,, \quad x_3 = \sqrt{t_1}\,, \quad x_4 = \sqrt{t_2}\,.$$

Заметим, что

$$x_1x_3 = x_2x_4 = -\sqrt{t_1t_2} = -11.$$

Кроме того, обозначим

$$k = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = x_2 + x_4 = -(x_1 + x_3).$$

Теперь имеем:

$$-\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)} = -\frac{121 + 11(x_1 + x_3) + x_1x_3}{1 + x_2 + x_4 + x_2x_4} = -\frac{121 - 11k - 11}{1 + k - 11} = \frac{11k - 110}{k - 10} = 11.$$

Ответ: 11.

6 Разложение квадратного трёхчлена на множители

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называются также *корнями квадратного трёхчлена* $ax^2 + bx + c$. Зная корни квадратного трёхчлена, можно разложить его на множители.

Теорема. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Тогда имеет место разложение на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{11}$$

Доказательство. Докажем формулу (11) «справа налево» — раскроем в правой части скобки и применим теорему Виета:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) = a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c,$$

что и требовалось.

Задача 13. Разложить на множители квадратный трёхчлен $2x^2 + 3x - 2$.

Решение. Находим корни уравнения $2x^2 + 3x - 2 = 0$: $x_1 = -2$ и $x_2 = 1/2$. По формуле (11) имеем:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 2)(2x - 1).$$

7 Задачи

1. Решите квадратное уравнение с помощью выделения полного квадрата. Корни проверьте по формулам Виета.

а) $x^2 - 6x + 8 = 0$; б) $x^2 + 9x + 14 = 0$;
в) $2x^2 - 7x - 15 = 0$; г) $3x^2 - 8x - 4 = 0$.

2. Решите квадратное уравнение с помощью упрощённой формулы корней ($b = 2k$). Корни проверьте по формулам Виета.

а) $x^2 + 2x - 3 = 0$; б) $x^2 + 6x + 2 = 0$;
в) $3x^2 - 8x + 4 = 0$; г) $5x^2 + 4x - 1 = 0$.

3. Найдите корни уравнения подбором с помощью формул Виета.

а) $x^2 - 5x + 4 = 0$; б) $x^2 - 7x - 8 = 0$;
в) $x^2 - 15x + 50 = 0$; г) $x^2 + 2x - 48 = 0$.

4. Решите уравнение:

а) $x^2 - 2014x - 2015 = 0$; б) $47x^2 - 153x + 106 = 0$;
в) $x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} = 0$; г) $x^2 + \pi x - 6\pi^2 = 0$.

5. (*ММО, 2009, 8.3*) Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ (a, b и c — отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

1

6. (*ММО, 2004, 8.1*) У квадратного уравнения $x^2+px+q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

Возьмите уравнение с корнем −1 и вторым целым корнем

7. (*Открытая олимпиада, 2022, 8.1*) Квадратные уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + ax + b = 0$ имеют по одному корню. Среди чисел p, q, a, b есть 16, 64 и 1024. Каким может быть четвёртое число?

Если возможных ответов несколько, в систему введите больший из них, а в письменном решении укажите все.

± 8, ± 64, 262144

8. (*Открытая олимпиада, 2021, 8.1*) Петя придумал приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0,$$

корнями которого являются числа x_1 и x_2. Он сообщил Васе три из четырёх чисел p, q, x_1, x_2, не указав, где какое. Это оказались числа 1, 2, -6. Каким было четвёртое число?

-3

9. (*«Шаг в будущее», 2020, 8.2*) Пусть $f(x) = x^2 - 5x + 2020$. Решите уравнение

$$f(3 - x) = f(3x - 1).$$

1,5; 1

10. (*«Шаг в будущее», 2018, 8.2*) Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами быть равным 7?

нет, не может

11. (*«Бельчонок», 2023, 8.2*) Приведённый квадратный трёхчлен имеет два действительных корня. Коэффициент при x^2 увеличили на 2, а коэффициент при x и свободный член уменьшили на 4. При этом оба корня трёхчлена увеличились на 1. Найдите исходный квадратный трёхчлен.

$x^2 + x - 2$

12. (*«Бельчонок», 2023, 8.2*) На доске написан квадратный трёхчлен $g(x) = x^2 + 2022x + 2024$. При своем ходе Катя изменяет на 1 (увеличивает или уменьшает) коэффициент при x. При своем ходе Вася увеличивает или уменьшает на 3 свободный член. Вася выигрывает, если в какой-нибудь момент написанный на доске многочлен $g(x)$ имеет целый корень. Первой ходит Катя. Может ли Катя помешать Васе выиграть при любых его ходах? Как она для этого должна действовать?

да, может

13. (*«Бельчонок», 2022, 8.2*) Оба корня квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ увеличили на 3, после чего получились корни трехчлена $x^2 - 2px - q$. Найдите p и q.

$\boxed{p = 2,\ q = -\frac{3}{2}}$

14. (*«Бельчонок», 2022, 8.2*) Квадратный трёхчлен $x^2 + 3px + p$ имеет корни u и v, а квадратный трёхчлен $x^2 - 4qx + q$ имеет корни $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$. Найдите p и q.

$\boxed{p = -\frac{4}{3},\ q = -\frac{3}{4}}$

15. (*«Бельчонок», 2022, 8.2*) Квадратный трехчлен $px^2 + qx + r$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен

$$3px^2 + 2(p+q)x + (q+r)$$

также имеет два корня.

16. (*«Бельчонок», 2022, 8.2*) Квадратный трехчлен $x^2 + ux - v$ имеет различные ненулевые корни p и q, а квадратный трехчлен $x^2 + px - q$ — различные ненулевые корни u и v. Найдите всевозможные значения p, q, u и v.

$\boxed{p = -1,\ q = 2,\ u = -1,\ v = 2}$

17. (*«Бельчонок», 2019, 8.2*) Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} = \frac{25}{12}$.

$\boxed{\frac{16}{9},\ \frac{9}{16}}$

18. (*«Бельчонок», 2019, 8.2*) Найдите $\frac{a}{b}$, если $(6a+b)^2 = 25ab$.

$\boxed{\frac{1}{4};\ \frac{1}{9}}$

19. (*Открытая олимпиада, 2019, 8.3*) Какое наибольшее количество различных приведённых квадратных уравнений может быть выписано на доске, если известно, что любые два из них имеют общий корень, а никакие четыре не имеют корня, общего для всех?

$\boxed{3}$

20. (*Открытая олимпиада, 2017, 8.4*) Даны три квадратных уравнения со старшим коэффициентом 3 и различными неотрицательными дискриминантами. Может ли дискриминант каждого из них являться корнем двух оставшихся уравнений?

$\boxed{\text{нет}}$

21. (*Открытая олимпиада, 2023, 8.2*) Дискриминант приведенного квадратного уравнения с корнями x_1 и x_2 равен 18, а дискриминант приведенного квадратного уравнения с корнями x_3 и x_4 равен 50. Какое значение может принимать дискриминант приведенного квадратного уравнения с корнями $x_1 + x_3$ и $x_2 + x_4$?

$\boxed{8,\ 128}$

22. (*«Росатом», 2021, 8.4*) Для каких простых чисел p и q квадратное уравнение

$$x^2 + px + 3q = 0$$

имеет целые корни?

Имеется две пары решений: $p = 5$, $q = 2$; $p = 7$, $q = 2$

23. (*Открытая олимпиада, 2020, 8.6*) Три различных числа a, b, c таковы, что $4a + 2b + c = 0$. Вася составил шесть квадратных уравнений, в каждом из которых все эти три числа являются коэффициентами, но в разном порядке. Какое наибольшее количество этих уравнений может не иметь корней?

2

24. (*Открытая олимпиада, 2016, 8.8*) На доске выписаны все трёхзначные натуральные числа, первые цифра которых нечётны и большей 1. Какое наибольшее количество квадратных уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ можно составить, использовав в качестве a, b и c данные числа, каждое не больше одного раза так, чтобы все эти уравнения имели корни?

100

25. (*Открытая олимпиада, 2018, 8.8*) Десятичную запись четырёхзначного числа АБВГ, состоящего из различных цифр, разбили на три части тремя способами, после чего составили три квадратных уравнения $\text{А}x^2 + \text{Б}x + \text{ВГ} = = 0$, $\text{А}x^2 + \text{БВ}x + \text{Г} = 0$ и $\text{АБ}x^2 + \text{В}x + \text{Г} = 0$. Оказалось, что все они имеют корни. Найдите все возможные значения АБВГ.

АБ, БВ и ВГ здесь не произведения цифр, а двузначные числа. Не только в записи числа АБВГ, но и в записях этих двухзначных чисел первые цифра не могут быть равны 0.

1920 или 2910

26. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 9.3*) У уравнений $x^2 + 2019ax + b = 0$ и $x^2 + 2019bx + a = 0$ есть один общий корень. Чему может быть равен этот корень, если известно, что $a \neq b$?

$\frac{1}{2019}$

27. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 9.4*) Разность корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами

$$2018x^2 + ax + b = 0$$

— целое число (при этом сами корни необязательно целые). Докажите, что дискриминант этого уравнения делится на 2018^2.

28. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 10.3*) Даны два уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$, в которых все коэффициенты ненулевые. Оказалось, что они имеют общий корень. Верно ли, что $a = c$?

Нет

29. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 11.4*) Учительница Мария Ивановна готовит задания для урока математики. Она хочет в уравнении

$$\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + b} = \frac{1}{c}$$

вместо a, b и c поставить три различных натуральных числа, чтобы корни уравнения были целыми числами. Помогите ей: подберите такие числа и решите уравнение.

30. (*МГУ, геологич. ф-т, 1997.1*) Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{5}\left(x^2+2\right)-2x\sqrt{7}=\sqrt[4]{21}\left(x^2-2\right)-2x\sqrt{3}\,?$$

Одно

31. (*ММО, 2004, 9.2*) У квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни — целые числа?

Да

32. (*МГУ, ДВИ, 2015.2*) Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2-7x+5=0$.

39

33. (*«Физтех», 2013, 9*) Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-2x-6=0$. Найдите $x_1^2x_2+x_1x_2^2$.

-12

34. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2+2x-5=0$, найдите:

а) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; б) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$; в) $x_1^3+x_2^3$; г) $x_1^4+x_2^4$; д) $|x_1-x_2|$.

а) $\frac{2}{5}$; б) $-\frac{14}{5}$; в) -38; г) 146; д) $2\sqrt{6}$

35. Не вычисляя корней уравнения $2x^2-5x-1=0$, найдите (положительную) разность квадратов его корней.

$\frac{5\sqrt{33}}{4}$

36. (*МГУ, экономич. ф-т, 2003.2*) Про числа x и y известно, что $x+y=18$, $xy=3$. Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{x^2|x|}+\frac{1}{y^3}\,.$$

210

37. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2-x-7=0$. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) x_1+2 и x_2+2; б) $\dfrac{1}{x_1^2}$ и $\dfrac{1}{x_2^2}$.

а) $3t^2-13t+7=0$; б) $49t^2-43t+9=0$

38. Коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0$ связаны соотношением $2b^2-9ac=0$. Докажите, что один корень этого уравнения в два раза больше другого.

39. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $S_k = x_1^k + x_2^k$ $(k \geqslant 0)$. Докажите, что при $n \geqslant 2$ справедлива формула

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0.$$

40. (*«Физтех», 2013, 9–11*) Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x + 1 = 0$. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1/x_2^2 и x_2/x_1^2. Найдите p.

$\boxed{-150{,}5}$

41. (*«Физтех», 2019, 9.1*) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax - 3$, $f_2(x) = x^2 + 2x - b$, $f_3(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x - 6 - b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (4 - a)x - 3 - 2b$. Пусть разности корней равны соответственно A, B, C и D. Известно, что $|C| \neq |D|$. Найдите отношение $\frac{A^2-B^2}{C^2-D^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

$\boxed{3}$

42. (*«Физтех», 2019, 9.1*) Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 + 1$ и $y = f(x) + 2$.

$\boxed{\sqrt{26}}$

43. (*«Физтех», 2019, 10.1*) Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{30}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 3$ равно $\sqrt{46}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$.

$\boxed{\sqrt{38}}$

44. (*«Физтех», 2019, 10.1*) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - 2ax + 3$, $f_2(x) = x^2 + x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (1 - 4a)x + 6 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x + 3 + 2b$. Пусть разности корней равны соответственно A, B, C и D. Известно, что $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

$\boxed{\frac{1}{3}}$

45. (*«Физтех», 2019, 11.1*) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax + 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (3 - 2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6 - a)x + 2 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

$\boxed{\frac{1}{3}}$

46. (*«Физтех», 2019, 11.1*) Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 1$ и $y = f(x)$ равно $3\sqrt{2}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) - 2$ равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

$\boxed{\sqrt{26}}$

47. (*«Физтех», 2018, 9.3*) Уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1 - \frac{72}{25x_2^3} = x_2 - \frac{72}{25x_1^3}\,.$$

Найдите все возможные значения a.

$\boxed{a = \pm 9}$

48. (*«Физтех», 2018, 9.3*) Уравнение $x^2 + ax + 3 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^3 - \frac{39}{x_2} = x_2^3 - \frac{39}{x_1}\,.$$

Найдите все возможные значения a.

$\boxed{a = \pm 4}$

49. (*«Физтех», 2018, 10.3*) Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}\,.$$

Найдите все возможные значения a.

$\boxed{a = 10}$

50. (*«Физтех», 2018, 10.3*) Уравнение $x^2 + ax + 2 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^3 + \frac{14}{x_2^2} = x_2^3 + \frac{14}{x_1^2}\,.$$

Найдите все возможные значения a.

$\boxed{a = 4}$

51. (*«Физтех», 2017, 9.5*) Известно, что одним из корней уравнения

$$x^2 - 4a^2b^2x = 4$$

является $x_1 = (a^2 + b^2)^2$. Найдите $a^4 - b^4$.

$\boxed{\pm 2}$

52. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9.10*) Найдите q, при котором уравнение

$$x^2 + x + q = 0$$

имеет два различных действительных корня x_1 и x_2, удовлетворяющих соотношению

$$x_1^4 + 2x_1x_2^2 - x_2 = 19.$$

$\boxed{-3}$

53. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9.8*) Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - x - 3 = 0$. Найдите

$$\left(x_1^5 - 20\right)\left(3x_2^4 - 2x_2 - 35\right).$$

$\boxed{-1063}$

54. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9.8*) Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - x - 4 = 0$. Найдите

$$\left(x_1^5 - 20x_1\right)\left(x_2^4 + 16\right).$$

$\boxed{1296}$

55. (*МГУ, геологич. ф-т, 1999.2*) Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения

$$2x^2 + \left(1 - 3\sqrt{2}\right)x - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 0.$$

Найти значение $A = x_1 + 3x_1x_2 + x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или $-1{,}999$.

$\boxed{A = -2 < -1{,}999}$

56. (*МГУ, филологич. ф-т, 2005.4*) Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $x^2 - 4x + 2 = 0$.

$\boxed{3\pi}$

57. (*МГУ, географич. ф-т, 2002.3*) Найти два различных корня $x_{1,2}$ уравнения

$$x^2 - 6px + q = 0,$$

если p, x_1, x_2, q — геометрическая прогрессия.

$\boxed{x_1 = -3,\ x_2 = 9 \text{ или } x_1 = 2,\ x_2 = 4}$

58. (*МГУ, мехмат, 2007.2*) Графики двух функций $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ и $g(x) = -5x^2 + 2x + 3$ пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

$\boxed{a = -\frac{6}{7},\ b = \frac{1}{7}}$

59. (*Турнир им. Ломоносова, 2003.6*) Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q.

$\boxed{p = 3,\ q = 2}$

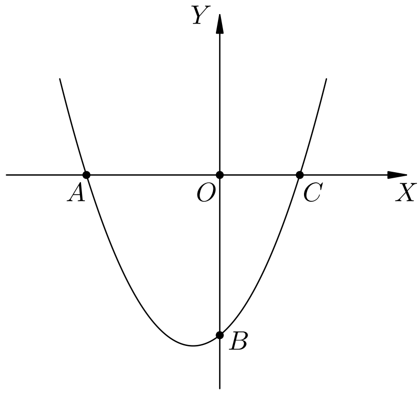
60. (*«Ломоносов», 2019, 9.2*) Расстояние между корнями квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ равно 1. Найдите коэффициенты p и q, если известно, что они являются простыми числами.

$\boxed{p = 3,\ q = 2}$

61. (*Турнир им. Ломоносова, 2008.5*) Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом – два отрицательных?

$\boxed{\text{Нет}}$

62. (*Всеросс., 2014, МЭ, 9.2*) На рисунке изображён график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC.



$\boxed{1}$

63. (*ММО, 2006, окружной тур, 10.2*) Даны квадратные трёхчлены f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырёх корней этих трёхчленов равна p. Найдите сумму корней трёхчлена $f + g$, если известно, что он имеет два корня.

$\boxed{p/2}$

64. (*«Высшая проба», 2014, 9.6*) Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — различные корни уравнения

$$x^4 - 2^{2013}x^2 + 49 = 0,$$

идущие в порядке возрастания, т. е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Найдите значение выражения

$$-\frac{(7 + x_1)(7 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}.$$

$\boxed{7}$

65. (*«Высшая проба», 2014, 9.7*) Даны два уравнения:

$$x^6 + px^3 + q = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 5x - 10^{2013} = 0.$$

Известно, что оба корня второго уравнения являются также корнями первого. Найти последние три цифры в десятичной записи числа p. (Если p не целое, найдите три цифры перед запятой.)

$\boxed{125}$

66. (*Всеросс., 2012, МЭ, 10.2*) Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

67. (*Всеросс., 2018, МЭ, 11.1*) Графики функций $y = ax^2$, $y = bx$ и $y = c$ пересекаются в точке, расположенной выше оси абсцисс. Определите, сколько корней может иметь уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

68. (*ММО, 2016, 9.3*) Васе задали на дом уравнение $x^2+p_1x+q_1=0$, где p_1 и q_1 — целые числа. Он нашел его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2+p_2x+q_2=0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал четыре квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?

$\boxed{x^2+x-30=0}$

69. (*Всеросс., 2007, финал, 8.1*) Даны числа a, b, c. Докажите, что хотя бы одно из уравнений

$$x^2+(a-b)x+(b-c)=0, \quad x^2+(b-c)x+(c-a)=0, \quad x^2+(c-a)x+(a-b)=0$$

имеет решение.

70. (*Всеросс., 2013, финал, 9.1, 10.1*) Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений

$$(x-a)(x-b)=x-c, \quad (x-b)(x-c)=x-a, \quad (x-c)(x-a)=x-b$$

имеют решение.