Пирамида

1. (*«Физтех», 2017.7*) Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $MABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды — выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 1$, $CD = DA = 2$, а каждая из плоскостей боковых граней MAB, MBC, MCD, MDA составляет угол $45°$ с плоскостью основания.

а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины M, равна $\frac{9}{5}$.

б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

а) $\frac{27}{25}$; б) $\frac{4}{3}$

2. (*МФТИ, 2004.6*) Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причем $SK = 5$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC.

7; 24; $\sqrt{\frac{7}{2}}$

3. (*Моск. матем. регата, 2012, 10*) Докажите, что в правильной треугольной пирамиде двугранный угол между боковыми гранями больше, чем $60°$.

4. (*Моск. матем. регата, 2012, 11*) В тетраэдре $ABCD$ плоские углы BAD и BCD — тупые. Сравните длины рёбер AC и BD.

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019.3*) Две смежные боковые грани пирамиды, в основании которой лежит квадрат, перпендикулярны плоскости основания. Двугранный угол между двумя другими боковыми гранями равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите отношение высоты пирамиды к стороне основания.

1

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019.4*) В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 3\sqrt{2}$ и $AC = 2\sqrt{6}$. Высота пирамиды равна $\sqrt{6}$ и видна из вершин A и C под одним и тем же углом, равным $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Под каким углом она видна из вершины B?

$\frac{\pi}{8}$ или $\frac{3\pi}{8}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015.4*) Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, и делит биссектрису SD грани SAB и медиану SE грани SAC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды, если $SK : KA = SA : SB = = 2$?

$16 : 119$

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014.4*) В треугольной пирамиде $SABC$ рёбра SA, SB и SC не длиннее, чем 3, 4 и 5 соответственно, а площади граней SAB, SAC и SBC не меньше, чем 6, $15/2$ и 10 соответственно. Найдите объём пирамиды $SABC$.

10

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013.5*) Пять рёбер тетраэдра имеют длины 2, 4, 5, 9 и 13. Определите, может ли при этом длина шестого ребра:

а) равняться 11;

б) равняться 11,1.

а) Нет; б) нет

10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013.5*) Гора имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S, причём длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β ($\cos\beta = 0{,}6$). Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъёме или спуске под углом α к горизонту равна $4\cos^2\alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A, успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов 15 минут из точки C, если в середине пути он обязательно делает 9-минутную остановку?

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010.5*) Через точки L, M, N, лежащие соответственно на рёбрах AB, AC, AD правильного тетраэдра $ABCD$, проведена плоскость. Известно, что рёбра тетраэдра равны 1, объём пирамиды $ALMN$ равен $\sqrt{2}/48$ и $AL = 1/3$. Какие значения может принимать длина отрезка MN?

$\left[\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{13}}{4}\right]$

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010.6*) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$ длины всех рёбер равны 1. Некоторая плоскость пересекает отрезки SA, SB, SC, SD в точках K, L, M, N соответственно. Какие значения может принимать площадь треугольника SLN, если $SK = \frac{1}{2}$ и $SM = \frac{1}{3}$?

$\left[\frac{2}{25};\ \frac{1}{8}\right]$

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010.6*) Через точки M, N, K, L, лежащие соответственно на рёбрах SA, SB, SC, SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), проведена плоскость. Известно, что $MK \perp NL$, $SN = 3 \cdot SL$ и площадь треугольника SMK равна 12. Найдите площадь треугольника SLN.

16

14. (*«Ломоносов», 2010.8*) На ребре AS треугольной пирамиды $SABC$ отмечены такие точки M и N, что $AM = MN = NS$. Найдите площадь треугольника NBC, если площади треугольников ABC, MBC и SBC равны 2, 1 и $2\sqrt{7}$ соответственно.

3

15. (*«Ломоносов», 2019.8*) Боковое ребро правильной пирамиды равно 2. Может ли её объём быть равным 3,25?

16. (*«Ломоносов», 2013.8*) В пирамиде $FABC$ $AB = BC$, $FB = FK$, где K — середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями FAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями FBC и ABC как $1 : 3$. Плоскость π параллельна AB, делит ребро FC в отношении $1 : 4$, считая от вершины F, и проходит через основание O высоты FO пирамиды $FABC$. Найти отношение объёмов многогранников, на которые эта плоскость делит пирамиду $FABC$.

$5 : 11$ или $1 : 19$

17. (*МГУ, мехмат, 2002-03.4*) Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник $ABCDEF$, а ее боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Расстояния от точек B и C до прямой SD равны соответственно $\sqrt{\frac{23}{14}}$ и $\sqrt{\frac{15}{14}}$. Чему равна площадь треугольника ASD? Найти отношение наименьшей из площадей треугольных сечений пирамиды, проходящих через ребро SD, к площади треугольника ASD.

$\boxed{\frac{\sqrt{33}}{8}, \sqrt{\frac{15}{14}}}$

18. (*МГУ, мехмат, 2000-05.6*) Параллельные плоскости α и β делят тетраэдр $ABCD$ на три части так, что объем средней части меньше объемов каждой из крайней частей. Расстояния от точек A и B до плоскости α равны 15 и 10 соответственно. Расстояния от точек A и C до плоскости β равны 10 и 8 соответственно. Найти отношение площадей сечений тетраэдра плоскостями α и β, если известно, что одно из этих сечений — трапеция, а расстояние от точки D до плоскости α меньше 12.

$\boxed{\frac{134}{129}}$

19. (*МГУ, мехмат, 2000-07.6*) В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что плоскости треугольников ASC и BSD перпендикулярны друг другу. Найти площадь грани ASD, если площади граней ASB, BSC и CSD равны соответственно 5, 6 и 7.

$\boxed{\sqrt{38}}$

20. (*Всеросс., 2012, РЭ, 11*) Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

21. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11*) Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. (Здесь через $\angle(PQR, PQS)$ обозначается двугранный угол при ребре PQ в тетраэдре $PQRS$.) Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.

22. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 11*) В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при рёбрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $(B'C'D')$ параллельна плоскости (BCD).

23. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 11*) Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются.

24. (*Всеросс., 2012, финал, 11*) Дана пирамида $SA_1A_2 \ldots A_n$, основание которой — выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots \ldots A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают всё основание.

25. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10*) Докажите, что для любого тетраэдра его самый маленький двугранный угол (из шести) не больше, чем двугранный угол правильного тетраэдра.

26. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 10*) Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

27. (*Всеросс. по геометрии, 2012, 10*) Дан тетраэдр $ABCD$. Точка X выбрана вне тетраэдра так, что отрезок XD пересекает грань ABC во внутренней точке. Обозначим через A', B', C' проекции точки D на плоскости XBC, XCA, XAB соответственно. Докажите, что

$$A'B' + B'C' + C'A' < DA + DB + DC.$$

28. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар рёбер A_iA_j и B_kB_l, где (i, j, k, l) — перестановка чисел $(1, 2, 3, 4)$ (например, A_1A_2 и B_3B_4). Известно, что во всех парах, кроме одной, рёбра перпендикулярны. Докажите, что в оставшейся паре рёбра тоже перпендикулярны.

29. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равны?

30. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) а) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

31. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) а) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

32. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) Докажите, что из шести ребер тетраэдра можно сложить два треугольника.

33. (*Турнир городов, 1996, 10–11*) Можно ли разбить всё пространство на правильные тетраэдры и октаэдры?

34. (*Турнир городов, 1986, 9–10*) На рёбрах произвольного тетраэдра указали направления. Может ли сумма полученных таким образом шести векторов оказаться равной нулю?

35. (*Турнир городов, 2009, 10–11*) Внутри некоторого тетраэдра взяли произвольную точку X. Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему X с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке.

36. (*Турнир городов, 2001, 10–11*) На поверхности правильного тетраэдра с ребром 1 см отмечены 9 точек. Докажите, что среди этих точек найдутся две, расстояние между которыми (в пространстве) не превосходит 0,5 см.

37. (*Турнир городов, 1984, 9–10*) Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях провели высоты, а затем в каждой из боковых граней основания двух лежащих в ней высот соединили прямой. Докажите, что эти три прямые параллельны одной плоскости.

38. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) Покажите, как разбить пространство

а) на одинаковые тетраэдры;

б) на одинаковые равногранные тетраэдры (тетраэдр называется *равногранным*, если все его грани — равные треугольники).

39. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2006, 10–11*) Шесть отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

40. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2007, 10–11*) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке P, и SP является высотой пирамиды. Докажите, что проекции точки P на боковые грани пирамиды лежат на одной окружности.

41. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2004, 10–11*) В тетраэдре $DABC$: $\angle ACB = \angle ADB$, $(CD) \perp (ABC)$. В треугольнике ABC дана высота h, проведенная к стороне AB, и расстояние d от центра описанной окружности до этой стороны. Найдите длину CD.

$\boxed{2\sqrt{d(h-d)}}$

42. (*ММО, 2004, 10*) Существует ли тетраэдр, все грани которого — равные прямоугольные треугольники?

43. (*ММО, 2007, 11*) В основании $A_1A_2\ldots A_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$ лежит точка O, причём $SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n$ и $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \ldots = \angle SA_nO$. При каком наименьшем значении n отсюда следует, что SO — высота пирамиды?

44. (*ММО, 2011, 11*) По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остаётся только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определённом направлении, причём так, что каждые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся.

45. (*ММО, 1993, 11*) Муха летает внутри правильного тетраэдра с ребром a. Какое наименьшее расстояние она должна пролететь, чтобы побывать на каждой грани и вернуться в исходную точку?

46. (*«Высшая проба», 2020, 11.6*) В правильном тетраэдре с ребром, равным 8, отмечены 25 различных точек: 4 вершины и 21 произвольная точка внутри тетраэдра. Никакие 4 отмеченные точки не лежат в одной плоскости. Докажите, что найдется тетраэдр с вершинами в отмеченных точках, объем которого меньше единицы.