

Проектирование или векторы?

Если в стереометрической задаче нет расстояний и углов, а есть только параллельность и отношения отрезков, то могут хорошо работать два приёма.

1. *Параллельное проектирование.* Удачный выбор плоскости проектирования¹ и прямой проектирования² позволяет свести задачу к планиметрической. При параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные, а отношение длин отрезков, расположенных на параллельных прямых, сохраняется.

2. *Векторы.* Выбираем базис — тройку некопланарных векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} (например, три ребра параллелепипеда, призмы или пирамиды). Раскладываем данные в задаче параллельные векторы по этому базису (будут фигурировать неопределённые коэффициенты, например λ и μ). Ищем эти неопределённые коэффициенты исходя из того, что если векторы

$$\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \nu_1 \vec{c} \quad \text{и} \quad \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{a} + \mu_2 \vec{b} + \nu_2 \vec{c}$$

параллельны, то

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

ЗАДАЧА 1. На диагоналях A_1B и B_1C боковых граней параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбраны точки M и N так, что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда AC_1 . Найдите отношение $MN : AC_1$.

8 : 1

ЗАДАЧА 2. В треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ точки M и N — середины боковых рёбер AA_1 и CC_1 соответственно. На отрезках CM и AB_1 расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel BN$. Найдите отношение $EF : BN$.

4 : 1

ЗАДАЧА 3. В пирамиде $ABCD$ точки M , F и K — середины рёбер BC , AD и CD соответственно. На прямых AM и CF взяты соответственно точки P и Q , причём $PQ \parallel BK$. Найдите отношение $PQ : BK$.

2 : 5

ЗАДАЧА 4. На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки M и N , причём прямая MN параллельна плоскости BDC_1 и $AM : AD = 1 : 5$. Найдите отношение $CN : CA_1$.

8 : 3

ЗАДАЧА 5. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на прямых AC и BA_1 взяты точки K и M так, что $KM \parallel DB_1$. Найдите отношение $KM : DB_1$.

8 : 1

¹То есть плоскости, на которую производится проектирование.

²То есть прямой, параллельно которой производится проектирование.

ЗАДАЧА 6. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки M и N , причём отрезки MN и $A_1 C$ параллельны. Найдите отношение этих отрезков.

8 : 1

ЗАДАЧА 7. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка M , а на прямой $B_1 C$ — точка N , причём отрезки MN и BD параллельны. Найдите отношение этих отрезков.

8 : 1

ЗАДАЧА 8. Через середины M и N рёбер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость параллельно диагонали DB_1 . Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью. В каком отношении она делит ребро BB_1 ?

1 : 9

ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 1981) Точка D — середина ребра $A_1 C_1$ правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$. Правильная треугольная пирамида $SMNP$ расположена так, что плоскость её основания совпадает с плоскостью ABC , вершина M лежит на продолжении AC , причём $CM = \frac{1}{2}AC$, ребро SN проходит через точку D , а ребро SP пересекает отрезок BB_1 . В каком отношении отрезок BB_1 делится точкой пересечения?

1 : 8