

# Произведения и факториалы

## Содержание

1	Всероссийская олимпиада школьников по математике . . . . .	1
2	Московская математическая олимпиада . . . . .	1
3	Олимпиада им. Леонарда Эйлера . . . . .	2
4	Турнир городов . . . . .	2

## 1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. (Всеросс., 2019, ШЭ, 8.5) По определению  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Докажите, что выражение

$$1008! \cdot 1009! \cdot 2017! \cdot 2018!$$

не является квадратом натурального числа.

1.2. (Всеросс., 2017, РЭ, 9.1) В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016?

1.3. (Всеросс., 2017, РЭ, 10.1) В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз?

1.4. (Всеросс., 2017, РЭ, 11.1) В произведении семи натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 13 раз?

1.5. (Всеросс., 2008, ЗЭ, 9.1, 10.1) Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

1.6. (Всеросс., 2014, РЭ, 9.8) Какое из чисел больше:  $(100!)!$  или  $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$ ?

1.7. (Всеросс., 2012, ЗЭ, 11.8) Для натурального  $n$  обозначим  $S_n = 1! + 2! + \dots + n!$ . Докажите, что при некотором  $n$  у числа  $S_n$  есть простой делитель, больший  $10^{2012}$ .

## 2 Московская математическая олимпиада

2.1. (ММО, 2016, 8.1, 10.1) Можно ли число  $1/10$  представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей?

2.2. (ММО, 2014, 8.3) Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?

2.3. (ММО, 2008, 11.2) Найдите наименьшее натуральное  $n$ , для которого число  $n^n$  не является делителем числа  $2008!$ .

**2.4.** (ММО, 2013, 11.3) Сравните числа

$$\left(1 + \frac{2}{3^3}\right) \left(1 + \frac{2}{5^3}\right) \dots \left(1 + \frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

**2.5.** (ММО, 2009, 11.5) Для каждого простого  $p$  найдите наибольшую натуральную степень числа  $p!$ , на которую делится число  $(p^2)!$ .

### 3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

**3.1.** (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2010.2) Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.

**3.2.** (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2011.6) На доске написано число 1. Если на доске написано число  $a$ , его можно заменить любым числом вида  $a + d$ , где  $d$  взаимно просто с  $a$  и  $10 \leq d \leq 20$ . Можно ли через несколько таких операций получить на доске число  $18!$ ?

### 4 Турнир городов

**4.1.** (Турнир городов, 2015, 8–9.3) Можно ли все натуральные делители числа  $100!$  (включая 1 и само число) разбить на две группы так, чтобы в обеих группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы?

**4.2.** (Турнир городов, 2015, 10–11.3) Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру  $k$  раз, и все  $k$  раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение  $k$ .