Процессы и операции

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 5–6.4; 7–8.2; 9.1*) Из последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ... удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2018 месте среди оставшихся?

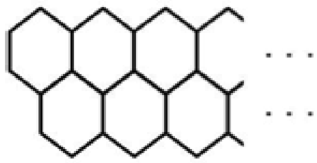
2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.3*) Робот движется по прямолинейным участкам, при этом совершая повороты через каждую минуту на 90 градусов направо или налево (временем на поворот пренебречь). За минуту робот проходит 10 метров. На каком минимальном расстоянии от начального положения он может оказаться через 9 минут после начала движения, если в течение первой минуты робот не поворачивал?

3. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 9.6*) Есть три сосуда объёмом 3 л, 4 л и 5 л без делений, кран с водой, раковина и 3 л сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 л смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа?

4. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 10.3*) На доске в произвольном порядке выписаны числа от 1 до 2017. Два числа можно поменять местами, если одно из них делится на другое. Докажите, что за несколько таких операций числа можно расположить в порядке возрастания.

5. (*ОММО, 2016, 9–10.2*) На доске написано число 27. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на его место произведение его цифр, увеличенное на 12. Например, через минуту на доске будет написано число $2 \cdot 7 + 12 = 26$. А что окажется на доске через час?

6. (*«Высшая проба», 2019, 7–8.1*) У Васи есть 2019 спичек. Он выкладывает из них в два ряда шестиугольники, примыкающие друг к другу:



Сколько шестиугольников у него получится?

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.2*) На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Над ними последовательно проделывают 2014 операций, причём n-я по счёту операция состоит в следующем: произвольные числа a и b (из написанных на доске) стираются и дописывается одно число, равное ab/n. Что останется на доске в конце?

8. (*Всеросс., 2019, МЭ, 8.4*) На острове *Лжецов и Рыцарей* расстановку по кругу называют правильной, если каждый, стоящий в кругу, может сказать, что среди двух его соседей есть представитель его племени. Однажды 2019 аборигенов образовали правильную расстановку по кругу. К ним подошел лжец и сказал: «Теперь мы вместе тоже можем образовать правильную расстановку по кругу». Сколько рыцарей могло быть в исходной расстановке?

9. (*«Курчатов», 2016, 8.4*) На олимпиаду пришли 300 учеников из не менее чем 4 школ. Докажите, что их можно разбить на команды по 3 человека в каждой так, чтобы в каждой команде либо все три ученика были из одной школы, либо все три — из разных школ.

10. (*«Курчатов», 2018, 8.5*) В нижней строке прямоугольника 2×2018 размещены 2018 фишек, занумерованных числами 1, 2, …, 2018 слева направо. За одну операцию разрешается передвинуть любую фишку в соседнюю по стороне пустую клетку. Какое наименьшее количество операций требуется для того, чтобы разместить фишки в нижней строке в обратном порядке?

11. (*«Высшая проба», 2016, 7.5, 8.5, 9.4*) На доске написаны числа 1, 1/2, 1/3, …, 1/100. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $a + b + ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

12. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8.4*) На доске были записаны числа 3, 9 и 15. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было 2013. Каковы были два остальных числа?

13. (*ММО, 2020, 8.3*) Дано натуральное число N. Вера делает с ним следующие операции: сначала прибавляет 3 до тех пор, пока получившееся число не станет делиться на 5 (если изначально N делится на 5, то ничего прибавлять не надо). Получившееся число Вера делит на 5. Далее делает эти же операции с новым числом, и так далее. Из каких чисел такими операциями нельзя получить 1?

14. (*ММО, 2018, 8.4*) Андрей Степанович каждый день выпивает столько капель валерьянки, сколько в этом месяце уже было солнечных дней (включая текущий день). Иван Петрович каждый пасмурный день выпивает количество капель валерьянки, равное номеру дня в месяце, а в солнечные дни не пьёт. Докажите, что если в апреле ровно половина дней будет пасмурные, а другая половина — солнечные, то Андрей Степанович и Иван Петрович выпьют за месяц поровну валерьянки.

15. (*ММО, 2019, 8.4, 10.3*) На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

16. (*ММО, 2020, 9.3*) Три богатыря сражаются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает половину всех голов и еще одну, Добрыня Никитич — треть всех голов и еще две, а Алёша Попович — четверть всех голов и еще три. Богатыри бьют по одному, в том порядке, в котором считают нужным. Если ни один богатырь не может ударить из-за того, что число голов получится нецелым, то Змей съедает богатырей. Смогут ли богатыри отрубить все головы 20^{20}-головому Змею?

17. (*ММО, 2018, 8.5*) В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a\,?\,b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!» и «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a-18b$.

18. (*ММО, 2016, 8.6*) Чётное число орехов разложено на три кучки. За одну операцию можно переложить половину орехов из кучки с чётным числом орехов в любую другую кучку. Докажите, что, как бы орехи ни были разложены изначально, такими операциями можно в какой-нибудь кучке собрать ровно половину всех орехов.

19. (*«Высшая проба», 2015, 8.1, 9.1*) Коля придумал себе развлечение: он переставляет цифры в числе 2015, после чего ставит между любыми двумя цифрами знак умножения. При этом ни один из получившихся двух сомножителей не должен начинаться с нуля. Затем он вычисляет значение этого выражения. Например: $150\cdot 2=300$, или $10\cdot 25=250$. Какое наибольшее число у него может получиться в результате такого вычисления?

20. (*Турнир городов, 2017, 8–9.5*) Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше — 2 ягоды, следующий — 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса?

21. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше — 2 ягоды, следующий — 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наибольшее количество ягод может съесть лиса?

22. (*Турнир городов, 2017, 8–9.1*) Десяти ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине всем другим детям. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

23. (*Турнир городов, 2017, 10–11.1*) 100 ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине некоторым (кому хочет) из остальных. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

24. (*Всеросс., 2014, МЭ, 9.6*) Двадцать пять монет раскладывают по кучкам следующим образом. Сначала их произвольно разбивают на две группы. Затем любую из имеющихся групп снова разбивают на две группы, и так далее до тех пор, пока каждая группа не будет состоять из одной монеты. При каждом разбиении какой-либо группы на две записывается произведение количеств монет в двух получившихся группах. Чему может быть равна сумма всех записанных чисел?

25. (*Всеросс., 2019, МЭ, 9.4*) Двум мудрецам, А и Б, назначено испытание. Наутро их приведут в комнату, где на столе по кругу будут лежать шесть одинаковых с виду таблеток, из которых четыре безвредны, а две отравлены. Затем мудрецу А сообщат, какие таблетки отравлены, но передать информацию Б он уже не сможет. Мудрецы должны по очереди (начинает А) съедать по таблетке, пока не останется только две ядовитых. Как мудрецам заранее договориться, чтобы успешно пройти испытание?

26. (*Всеросс., 2017, МЭ, 10.6*) 100 включённых и 100 выключенных фонариков случайным образом разложены по двум коробкам. У каждого фонарика есть кнопка, нажатие которой выключает горящий фонарик и зажигает выключенный. Ваши глаза завязаны, и Вы не можете видеть, горит ли фонарик. Но Вы можете перекладывать фонарики из коробки в коробку и нажимать на них кнопки. Придумайте способ добиться того, чтобы горящих фонариков в коробках стало поровну.

27. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9.6*) Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

28. (*«Курчатов», 2019, 11.3*) По кругу лежат 100 пирожков, из них 53 с капустой, а остальные — с рисом. Алексей знает, какие из них с чем, и хочет выбрать 67 подряд лежащих пирожков так, чтобы среди них было ровно k с капустой. При каких k ему это гарантированно удастся сделать независимо от расположения пирожков? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

29. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 9.7*) В карточной игре каждой карте сопоставлено числовое значение от 1 до 100, причём каждая карта бьёт меньшую, за одним исключением: 1 бьёт 100. Игрок знает, что перед ним лежат рубашками вверх 100 карт с различными значениями. Крупье, знающий порядок этих карт, может про любую пару карт сообщить игроку, какая из них какую бьёт. Докажите, что крупье может сделать сто таких сообщений, чтобы после этого игрок смог точно узнать значение каждой карты.

30. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 9.8*) В государстве n городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник может выбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на $n-1$ экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)

31. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 9–11.3*) Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нём проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в каком-нибудь из образовавшихся при предыдущих построениях треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведённые высоты. Докажите, что на плоскости можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из этих прямых.

32. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 10.3*) В сейфе n ячеек с номерами от 1 до n. В каждой ячейке первоначально лежала карточка с её номером. Вася переложил карточки в некотором порядке так, что в i-й ячейке оказалась карточка с числом a_i. Петя может менять местами любые две карточки с номерами x и y, платя за это $2|x-y|$ рублей. Докажите, что Петя сможет вернуть все карточки на исходные места, заплатив не более $|a_1-1|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-n|$ рублей.

33. (*Всеросс., 2014, МЭ, 11.4*) На экране компьютера — число 12. Каждую секунду число на экране умножают или делят либо на 2, либо на 3. Результат действия возникает на экране вместо записанного числа. Ровно через минуту на экране появилось число. Могло ли это быть число 54?

34. (*«Высшая проба», 2018, 9.6*) Из натурального числа n разрешается получить либо число $2n+1$, либо число $3n+2$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа от 1 до 2017, совместимые с числом 2018.

35. (*«Высшая проба», 2019, 9.2, 10.2*) Вовочка хочет передать Наташе на уроке записку в подписанном конверте, при этом конверт в известном порядке сначала проходит через весь остальной класс. Каждый ученик, кроме Наташи, может недолюбливать одного одноклассника, и, если передает конверт, подписанный собой, меняет на этого кого-то, если подписанный этим кем-то — на себя, иначе просто передаёт дальше по цепочке. Сколько учеников в классе могут кого-то недолюбливать, если Вовочка может так заранее подписать записку, чтобы Наташе конверт дошел с любым именем, с каким он хочет? (Все имена в классе различны.)

36. (*«Высшая проба», 2018, 10.5, 11.5*) Из натурального числа n разрешается получить либо число n^2+2n, либо число n^3+3n^2+3n. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

37. (*«Курчатов», 2018, 11.4*) У Васи есть калькулятор с двумя кнопками, на экране которого отображается целое число x. Нажатие на первую кнопку заменяет число x на экране на число $[x/2]$, а нажатие на вторую кнопку заменяет число x на число $4x+1$. Вначале на экране калькулятора отображается число 0. Сколько натуральных чисел, не превосходящих числа 2018, можно получить последовательным нажатием кнопок? (Разрешается в процессе получать числа, большие 2018. Через $[y]$ обозначена целая часть числа y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y.)

38. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

39. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) а) Есть неограниченный набор карточек со словами «abc», «bca», «cab». Из них составляют слово по такому правилу. В качестве начального слова выбирается любая карточка, а далее на каждом шаге к имеющемуся слову можно либо приклеить карточку слева или справа, либо разрезать слово в любом месте (между буквами) и вклеить карточку туда. Можно ли так составить палиндром?

б) Есть неограниченный набор красных карточек со словами «abc», «bca», «cab» и синих карточек со словами «cba», «acb», «bac». Из них по тем же правилам составили палиндром. Верно ли, что было использовано одинаковое количество красных и синих карточек?

40. (*Всеросс., 2017, РЭ, 11.7*) На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны каждой из проведённых прямых были равны.

41. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 11.5*) На столе по кругу разложены 1000 карточек, на каждой написано по натуральному числу; все эти числа различны. Сначала Вася выбирает одну из карточек и снимает её со стола. Далее он повторяет следующую операцию. Если на последней снятой карточке было написано число k, то Вася отсчитывает от неё по часовой стрелке k-ю не снятую со стола карточку и тоже снимает её. Это происходит до тех пор, пока на столе не останется одна карточка. Могло ли оказаться, что в начальном расположении есть такая карточка A, что если снять первой любую другую карточку, то в конце останется обязательно карточка A?

42. (*Всеросс., 2019, ЗЭ, 11.5*) Радиусы пяти концентрических окружностей ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем q. При каком наибольшем q можно нарисовать незамкнутую ломаную $A_0A_1A_2A_3A_4$, состоящую из четырёх отрезков равной длины, в которой A_i лежит на ω_i при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$?

43. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 10.3, 11.3*) Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

44. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 10.4*) Изначально на доске записано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдётся натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное количество раз.

45. (*Всеросс., 2017, ЗЭ, 11.4*) У фокусника и помощника есть колода с картами; одна сторона («рубашка») у всех карт одинакова, а другая окрашена в один из 2017 цветов (в колоде по 1000000 карт каждого цвета). Фокусник и помощник собираются показать следующий фокус. Фокусник выходит из зала, а зрители выкладывают на стол в ряд $n > 1$ карт рубашками вниз. Помощник смотрит на эти карты, а затем все, кроме одной, переворачивает рубашкой вверх, не меняя их порядка. Затем входит фокусник, смотрит на стол, указывает на одну из закрытых карт и называет её цвет. При каком наименьшем n фокусник может заранее договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

46. (*ММО, 2019, 11.5*) На доске написано несколько чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b, а затем вместо одного из них написать число $\frac{a+b}{4}$. Какое наименьшее число может остаться на доске после 2018 таких операций, если изначально на ней написано 2019 единиц?

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

47. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2009.1*) Гриб называется *плохим*, если в нём не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

48. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2013.2*) На пути в музей группа детсадовцев построилась парами, причём количество пар из двух мальчиков было в три раза больше количества пар из двух девочек. На обратном пути та же группа построилась так, что количество пар из двух мальчиков было в четыре раза больше количества пар из двух девочек. Докажите, что эту же группу можно построить так, чтобы количество пар из двух мальчиков было в семь раз больше количества пар из двух девочек.

49. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2010.2*) Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.

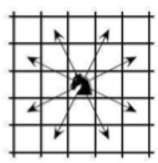
50. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2010.6*) В компании из шести человек любые пять могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

51. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2011.6*) На доске написано число 1. Если на доске написано число a, его можно заменить любым числом вида $a+d$, где d взаимно просто с a и $10 \leqslant d \leqslant 20$. Можно ли через несколько таких операций получить на доске число $18! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 18$?

52. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2018.7*) В полдень Вася положил на стол 10 вырезанных из бумаги выпуклых десятиугольников. Затем он время от времени брал ножницы, разрезал по прямой один из лежащих на столе многоугольников на два и клал оба получившихся куска назад на стол. К полуночи Вася проделал такую операцию 51 раз. Докажите, что в полночь среди лежащих на столе многоугольников был треугольник или четырёхугольник.

53. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2019.9*) Имеется 70 переключателей и 15 ламп. Каждая лампа соединена с 35 переключателями. Никакие два переключателя не соединены с одним и тем же набором ламп. Нажатие на переключатель меняет состояние всех ламп, с которыми он соединён (включённые выключает и наоборот). Изначально все лампы выключены. Докажите, что можно нажать на какие-то 19 переключателей таким образом, чтобы включилось не менее восьми ламп.

54. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2015.8*) На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь бьёт буквой «Г» (см. рисунок).



55. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2015.1*) Назовём *хорошими прямоугольниками* квадрат со стороной 2 и прямоугольник со сторонами 1 и 11. Докажите, что любой прямоугольник с целочисленными сторонами, большими 100, можно разрезать на хорошие прямоугольники.

56. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2014.5*) Петя и Вася одновременно ввели в свои калькуляторы одно и то же не равное 0 целое число. После этого каждую минуту Петя либо прибавлял к своему числу 10, либо умножал его на 2014; одновременно Вася в первом случае вычитал из своего числа 10, а во втором — делил его на 2014. Могло ли оказаться, что через некоторое время числа у Пети и Васи снова стали равными?

57. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2010.5*) На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10. Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырёх других томов. Всегда ли можно расставить все тома по возрастанию номеров?

58. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2019.2*) Устройство `KK42` работает так: если положить в него четыре шарика, то в первый лоток вывалится второй по весу шарик (т. е. шарик веса b, если $a > b > c > d$), а во второй лоток вывалятся остальные. С другим числом шариков устройство не работает. Имеются 100 одинаковых на вид шариков попарно различных весов. Их пронумеровали числами $1, 2, \ldots, 100$. Как, использовав прибор не более 100 раз, найти самый тяжелый шарик?

59. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2013.2*) Из шахматной доски размером 13×13 вырезали две противоположные угловые клетки. На оставшейся части доски отметили несколько клеток. Докажите, что на отмеченные клетки можно поставить шахматных королей так, чтобы всего королей было не больше 47, и они били все пустые отмеченные клетки. Напомним, что шахматный король бьёт все клетки, соседние с ним по вертикали, горизонтали и диагонали.

60. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2016.6*) В школе 30 кружков, в каждом занимаются 40 детей. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, 30$ обозначим через n_i количество детей, занимающихся ровно в i кружках. Докажите, что в этой же школе можно организовать 40 кружков с 30 детьми в каждом так, чтобы числа n_i для этих новых кружков были бы теми же самыми.

61. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2013.8*) 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным — другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого — 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?