Вероятность

Классическая вероятность

Всякий раз, когда мы вычисляем вероятность некоторого события, нам нужно прежде всего сделать две вещи:

1. Описать множество элементарных событий Ω.
2. Описать событие (вероятность которого ищется) как подмножество множества Ω.

Например, при бросании игрального кубика имеем $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пусть A — событие «Выпало чётное число очков». Тогда $A = \{2, 4, 6\}$.

Когда с множествами Ω и A всё ясно, делается третий шаг: событию A сопоставляется *вероятность* — число из отрезка $[0; 1]$. Делать это можно по-разному. Наиболее просто устроена *классическая вероятностная модель*:

- Множество Ω содержит конечное число элементарных событий: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.
- Событием может являться любое подмножество A множества Ω.
- Все элементарные события ω_i считаются равновозможными, и поэтому им приписывается вероятность $\frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}$. Если событие A состоит из m элементарных событий, то его вероятность $p(A)$ определяется по формуле

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}\,.$$

Во всех нижеследующих задачах обязательно указывайте множество элементарных событий Ω и его подмножество A, вероятность которого просят найти.

1. Игральный кубик бросили дважды. Найдите вероятность того, что выпавшие числа отличаются на единицу.

$\boxed{\frac{5}{18}}$

2. Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность выпадения трёх орлов и пяти решек?

$\boxed{\frac{7}{32}}$

3. В ящике лежат 8 красных и 9 синих шаров. Вынимают наудачу 7 шаров. Какова вероятность того, что это будут 3 красных и 4 синих шара? (Вычислять не нужно, ответ дайте в виде комбинаторной формулы.)

4. (*«Физтех», 2016, 9*) Лабиринт представляет из себя цепочку из 7 комнат. Из первых 4 комнат в следующие ведут 2 двери, из оставшихся в следующую ведут 3 двери (из последней комнаты 3 двери ведут на выход). Лаборант случайным образом запер 10 дверей. Какова вероятность того, что крыса, посаженная в первую комнату, сможет выбраться из лабиринта?

$\boxed{\frac{432}{C_{17}^{10}} = \frac{54}{2431}}$

5. (*«Росатом», 2021, 11.4*) В колоде 10 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 10. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту три раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась равной 5?

$\boxed{0{,}006}$

6. (*«Физтех», 2020, 10.1*) Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?

7. (*«Физтех», 2020, 11.1*) Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p — вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q — вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.

$\boxed{\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{35}}$

8. (*«Физтех», 2020, 9.5*) Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?

Вероятность второго события больше

9. (*«Росатом», 2021, 11.4*) Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 6 единиц?

$\boxed{0{,}083}$

10. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Через случайно выбранные три вершины куба с ребром 2 проводится плоскость. Найти вероятность того, что площадь сечения превзойдет 5. Допускается, что эти вершины принадлежат одной грани куба.

$\boxed{\frac{3}{7}}$

11. (*«Росатом», 2020, 11.4*) Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число, кратное 5 и имеющее при делении на 7 остаток 3.

$\boxed{0{,}026}$

12. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Случайно выбранное шестизначное целое положительное число оканчивается на 32. Найти вероятность того, что оно делится на 14.

$\boxed{\frac{257}{1800}}$

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 11.4*) Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение

$$3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0.$$

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых как минимум два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

$\boxed{\frac{1}{4}}$

14. (*«Росатом», 2021, 11.4*) На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в три раза меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число шоколадных конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 10 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

$\boxed{11}$

15. (*«Высшая проба», 2018, 9.1, 11.1*) От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч, случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

$\boxed{\frac{1}{2}}$

Геометрическая вероятность

Классическая вероятностная модель работает не всегда. Рассмотрим, например, такую задачу. На отрезок $[0; 5]$ бросаем рандомно точку; с какой вероятностью она попадёт в отрезок $[1; 3]$? Чувствуется, что ответ здесь $2/5$, но получить его из прежних соображений не получится. Действительно, с множеством элементарных событий и интересующим нас событием тут понятно: $\Omega = [0; 5]$, $A = [1; 3]$, но проблема в том, что теперь мы не можем приписать отдельным элементарным событиям (то есть точкам) ненулевую вероятность и суммировать эти вероятности по непрерывному отрезку A. Следовательно, способ вычисления вероятности меняется: теперь это будет отношение длин отрезков:

$$p(A) = \frac{\text{длина отрезка } A}{\text{длина отрезка } \Omega}.$$

Точно так же и на плоскости: пусть внутри фигуры Ω расположена фигура A. С какой вероятностью точка, случайно брошенная внутрь Ω, попадёт в A? Ответ даётся аналогичной формулой:

$$p(A) = \frac{\text{площадь фигуры } A}{\text{площадь фигуры } \Omega}.$$

16. Внутри квадрата случайно выбрали точку. С какой вероятностью она окажется внутри круга, вписанного в этот квадрат?

$\boxed{\frac{\pi}{4}}$

17. (*Задача о встрече*) Аня и Таня договорились встретиться между 18 и 19 часами. Каждая из них приходит в случайный момент данного интервала времени, ждёт 20 минут и уходит (если не дождалась). Какова вероятность, что встреча состоится?

$\boxed{\frac{5}{9}}$

18. (*«Росатом», 2019, 11.4*) На сторонах BA и BC треугольника ABC совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника BMN окажется не больше половины площади треугольника ABC.

$\boxed{\frac{1+\ln 2}{2}}$

19. (*«Росатом», 2018, 11.4*) На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный.

$\boxed{\frac{3}{4}}$

20. (*«Росатом», 2019, 11.4*) На боковых ребрах DA и DB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды $MNCD$ с вершиной в точке D составляет не более половины площади боковой поверхности пирамиды $ABCD$.

$\boxed{\frac{5\ln\frac{8}{5}-1}{2}}$

21. (*«Росатом», 2019, 11.4*) В квадрате $ABCD$ со стороной 4 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 1. Через точку O совершенно случайно проведена прямая L, разделяющая квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую 3.

$\boxed{\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)}$

Дискретные распределения

Случайная величина X называется *дискретной*, если она может принимать дискретный набор значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ограничиваемся конечным набором значений, счётный набор вам пока вряд ли понадобится). Если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — соответственно вероятности данных значений, то набор $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется *распределением вероятностей* дискретной случайной величины X.

22. (*«Росатом», 2018, 11.4*) Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 10 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более двух шагов от начала движения.

$\boxed{\frac{11}{32}}$

23. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Игральная кость представляет собой кубик, на гранях которого отмечено другим цветом от одного до шести очков. Петя случайным образом бросает на стол три игральных кости одновременно и считает сумму числа очков, выпавших на всех костях. Каждое значение s этой суммы, расположенное от 3 до 18, может появится с определенной вероятностью. Найти s, при котором эта вероятность максимально возможная.

$\boxed{\text{10 или 11}}$

24. (*«Росатом», 2018, 11.4*) Код замка состоит из трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 3. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

$\boxed{0{,}334}$

25. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Игральная кость имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с двугранным углом 60° при основании. На боковых гранях пирамиды нарисованы цифры от 1 до 4, на основании — 5. Вероятность того, что при бросании кость ляжет на плоскость, закрывая определенную цифру, пропорциональна площади грани или основания с этой цифрой. Найти вероятность того, что сумма цифр, закрытых костью при трех бросаниях, равна 13.

$\boxed{\frac{1}{12}}$

26. (*«Росатом», 2020, 11.4*) Саша и Маша задают друг другу по пять каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Машей вопрос Саша скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{2}$. Маша на вопрос Саши дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{2}{3}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Маша дала на два правдивых ответа больше, чем Саша. С какой вероятностью это могло произойти?

$\boxed{\frac{65}{324}}$

27. (*«Росатом», 2022, 11.4*) Петя бросает несколько раз на стол игральный кубик и считает сумму очков, выпавших на его верхней грани. Для любого натурального числа n событие A_n наступает, если эта сумма равна n. Найти вероятность события A_{11}.

$\boxed{\frac{1}{10}\left(\frac{2}{6^2}+\frac{27}{6^3}+\frac{104}{6^4}+\frac{205}{6^5}+\frac{252}{6^6}+\frac{210}{6^7}+\frac{120}{6^8}+\frac{45}{6^9}+\frac{10}{6^{10}}+\frac{1}{6^{11}}\right)}$

28. (*«Росатом», 2022, 11.3*) Блоха Кузя может совершать прыжки по прямой L. Старт для прыжков находится в точке A прямой L, длина одного прыжка h, направление каждого прыжка выбирается случайным и равновозможным. Найти вероятность того, что, сделав от четырех до восьми случайных прыжков, Кузя хотя бы один раз будет находиться на расстоянии $3h$ от A.

$\boxed{\frac{73}{160}}$

Условная вероятность

Условная вероятность играет ключевую роль в формуле полной вероятности, поэтому с данным понятием нужно разобраться максимально подробно.

29. В ящике лежат 3 красных и 4 синих шара. Вынимают первый шар и затем, не возвращая его назад, вынимают второй.

- Найдите вероятность $p(KC)$ события «Первый шар — красный, второй — синий».
- Найдите вероятность $p(K)$ того, что первый шар — красный.
- Найдите вероятность $p(C|K)$ события «Второй шар является синим *при условии, что первый — красный*». Это и есть *условная вероятность*.
- Убедитесь, что $p(KC) = p(K)p(C|K)$.

30. Бросили два игральных кубика, на них выпало n_1 и n_2 очков. Событие A: «$n_1 + n_2 \geqslant 6$». Событие B: «n_1 нечётно».

- Изобразите множество элементарных событий Ω в виде квадрата 6×6. Выделите красным цветом событие A, зелёным — событие B.

- Глядя на эту картинку, найдите $p(A)$, $p(B)$, $p(AB)$, $p(A|B)$, $p(B|A)$. Убедитесь, что

$$p(AB) = p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B).$$

31. Теперь вам хорошо понятно, что такое условная вероятность $p(B|A)$: это вероятность события AB «с точки зрения» множества элементарных событий A (то есть исходное Ω сужается до A). В рамках классической (или геометрической) вероятностной модели докажите, что

$$p(B|A) = \frac{p(AB)}{p(A)}\,.$$

Формула полной вероятности

Снова кидаем два игральных кубика, и пусть на них выпадает n_1 и n_2 очков. Рассмотрим *гипотезы*:

$$\begin{aligned} H_0 :&\quad n_1 + n_2 \equiv 0 \pmod 3, \\ H_1 :&\quad n_1 + n_2 \equiv 1 \pmod 3, \\ H_2 :&\quad n_1 + n_2 \equiv 2 \pmod 3). \end{aligned}$$

Ясно, что события H_0, H_1, H_2 попарно несовместны (их попарные пересечения пусты), и при этом $\Omega = H_0 \cup H_1 \cup H_2$. Иными словами, множество элементарных событий Ω является *дизъюнктным объединением* гипотез H_0, H_1, H_2:

$$\Omega = H_0 \sqcup H_1 \sqcup H_2.$$

В таком случае говорят ещё, что гипотезы H_0, H_1, H_2 образуют *полную группу событий.*

32. Снова изобразите множество элементарных событий Ω в виде квадрата 6×6. В его клетках поставьте 0, 1 или 2 — это остатки от деления суммы очков $n_1 + n_2$ на 3.

- Найдите $p(H_0)$, $p(H_1)$, $p(H_2)$.

- Снова рассмотрим событие A: «$n_1 + n_2 \geqslant 6$». Вычислите $p(A|H_0)$, $p(A|H_1)$, $p(A|H_2)$.

- Убедитесь, что

$$p(A) = p(H_0)p(A|H_0) + p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2).$$

  Это и есть в данном случае *формула полной вероятности.*

33. Пусть множество элементарных событий Ω разбивается на гипотезы H_1, H_2, ..., H_n:

$$\Omega = H_1 \sqcup H_2 \sqcup \ldots \sqcup H_n.$$

Докажите *формулу полной вероятности*: для любого события $A \subset \Omega$ имеем

$$p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2) + \ldots + p(H_n)p(A|H_n)$$

Ограничиваемся классической вероятностной моделью.

34. В коробке лежат перемешанными все 28 доминошек. Вытаскиваем не глядя первую, а затем, не возвращая её назад, вытаскиваем вторую. Найдите вероятность того, что вторую можно приставить к первой.

$\boxed{\frac{7}{18}}$

35. Перед экзаменом вы выучили a билетов и не успели выучить остальные b билетов. В каком случае вероятность вытянуть хороший билет больше: когда вы идёте первым или когда вы идёте вторым? Сделайте вывод относительно стратегии поведения в данной ситуации :-)

36. (*«Росатом», 2021, 11.4*) На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый из игроков совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игроки могут забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

$\boxed{\frac{5}{9}}$

Математическое ожидание

Понятие математического ожидания (или просто матожидания) случайной величины является одним из ключевых в теории вероятностей и математической статистике.

37. На красной стороне монеты написано число 1, на синей — число 2. Но монета странная: её красная сторона выпадает с вероятностью 1/3, а синяя — с вероятностью 2/3. Бросим монету огромное число раз и усредним результат: какое число получим? Иными словами, чему равно матожидание выпавшего на монете числа?

38. Имеется игральный n-гранник. На его гранях написаны числа $a_1, \ldots, a_n$, и выпадают они соответственно с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$ (разумеется, выполнено равенство $p_1 + \ldots + p_n = 1$). Если выпало число a_i, то мы получаем a_i рублей. Каково матожидание нашего выигрыша?

39. Умеете ли вы обощать этот результат на случай непрерывной случайной величины? Именно, пусть случайная величина ξ непрерывно распределена на отрезке $[a, b]$ с плотностью вероятности $p(x)$. Чему равно матожидание ξ? Чему равно матожидание функции этой случайной величины $f(\xi)$?

40. (*«Росатом», 2016, 11.4*) Петя и Вова играют в кости на фантики. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4, и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдаёт Вове 1 фантик, выиграв — получает от Вовы k фантиков. Игра считается справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равна нулю. Найти значение k, при котором игра будет справедливой.

$\boxed{5}$

41. (*«Росатом», 2020, 11.4*) Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 2 : 1$, $AQ : QC = 1 : 3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое ожидание случайной величины — отношения площадей треугольников PQM и ABC.

$\boxed{\frac{2}{5};\ \frac{7}{24}}$