Признаки равенства треугольников

На рис. 1 мы видим *треугольник* ABC.

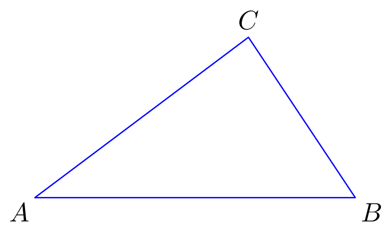

Рис. 1. Треугольник ABC

Точки A, B, C называются *вершинами* треугольника. Отрезки AB, BC, AC называются *сторонами* треугольника. Углы CAB, ABC и BCA так и называются — *углами* треугольника[1] и обозначаются соответственно $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$. Сам треугольник обозначается так: ΔABC.

Сторона AB является *противолежащей* для вершины (и угла) C. Углы $\angle A$ и $\angle B$ называются *прилежащими* к стороне AB.

Два треугольника называются *равными*, если у них равны стороны и углы. Попросту говоря, равные треугольники являются точными копиями друг друга (только расположены могут быть по-разному). Равные треугольники можно наложить друг на друга так, что они полностью совпадут.

Равенство треугольников ABC и DEF записывается обычным образом: $\Delta ABC = \Delta DEF$.

Во многих ситуациях бывает полезно установить равенство двух треугольников (например, чтобы доказать равенство каких-либо отрезков или углов). Оказывается, для этого нет необходимости проверять равенство *всех* сторон и углов или же пытаться накладывать треугольники друг на друга. Достаточно убедиться, что *три определённых элемента* данных треугольников соответственно равны — тем самым и будет обеспечено равенство самих треугольников.

Этими избранными тройками элементов являются: 1) две стороны и угол между ними; 2) сторона и два прилежащих к ней угла; 3) три стороны. Соответственно, имеем три *признака равенства треугольников*.

Первый признак равенства треугольников. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Данная ситуация проиллюстрирована на рис. 2.

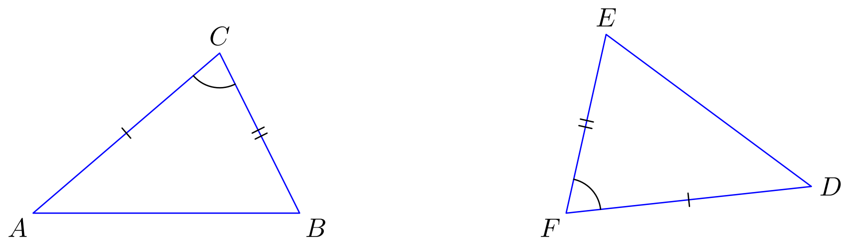

Рис. 2. $\Delta ABC = \Delta DEF$ по двум сторонам и углу между ними

[1] Угол треугольника называется также *внутренним* углом, а смежный с ним угол называется *внешним* углом.

Мы видим, что $AC = DF$, $BC = EF$ и $\angle C = \angle F$. Мысленно переместим треугольник DEF так, чтобы точка F совпала с точкой C и сторона FD наложилась на сторону CA. Тогда сторона FE автоматически совместится со стороной CB, и треугольники полностью совпадут[2].

Второй признак равенства треугольников. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Данная ситуация проиллюстрирована на рис. 3.

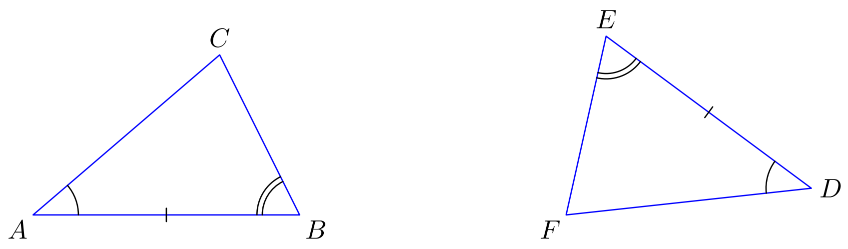

Рис. 3. $\Delta ABC = \Delta DEF$ по стороне и прилежащим к ней углам

Здесь $AB = DE$, $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle E$. Переместим треугольник DEF так, чтобы точка D совпала с точкой A и сторона DE наложилась на сторону AB. Легко видеть, что тогда остальные пары сторон автоматически совместятся, то есть треугольники полностью совпадут.

Третий признак равенства треугольников. Если три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Данная ситуация проиллюстрирована на рис. 4.

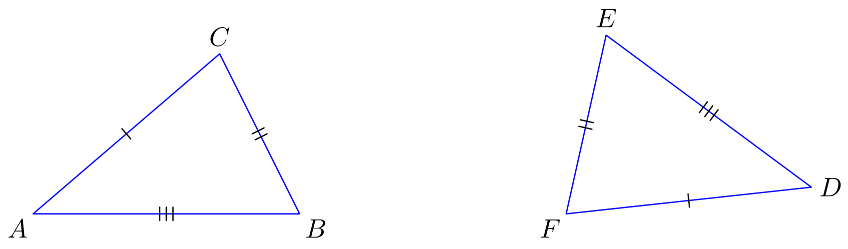

Рис. 4. $\Delta ABC = \Delta DEF$ по трём сторонам

Ясно, что при совмещении точек D и A, E и B произойдёт также совмещение точек F и C, то есть треугольники полностью совпадут.

Если в равных треугольниках ABC и DEF вершины поставлены так, что $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ и $\angle C = \angle F$ (а именно так и было на предыдущих рисунках), то вершины A и D, B и E, C и F называются *соответствующими*. Равные треугольники совпадают, если их накладывать друг на друга соответствующими вершинами.

Записывая равенство треугольников, порой стремятся соблюдать порядок перчисления соответствущих вершин (то есть чтобы из равенства $\Delta ABC = \Delta DEF$ непременно следовали равенства $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ и $\angle C = \angle F$). Мы в дальнейшем не всегда придерживаемся этого соглашения и не заботимся о порядке следования вершин (понятно ведь, что треугольник ABC и треугольник CBA — это один и тот же треугольник). Если порядок всё же соблюден и нам важно указать на это, мы будем писать, что вершины согласованы.

[2] Данное рассуждение не является доказательством первого признака, но лишь проясняет его идею. То же относится к аналогичным рассуждениям после формулировок второго и третьего признаков. Строгие доказательства изложены в школьных учебниках.

Вообще, два элемента равных треугольников называются соответствующими, если они совпадают при совмещении данных треугольников. Так, можно говорить о соответствующих сторонах или углах равных треугольников, а также о соответствии других элементов. К рассмотрению некоторых элементов треугольника мы сейчас и переходим.

Медиана, биссектриса, высота треугольника

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Задача. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие медианы равны.

Решение. Пусть треугольник ABC равен треугольнику DEF (вершины согласованы, рис. 5).

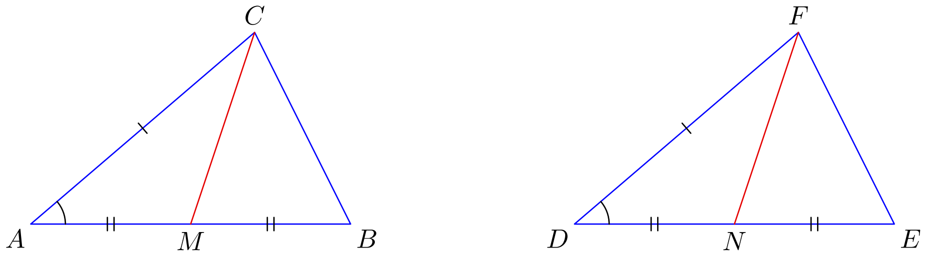

Рис. 5. К задаче

Проведём медианы CM и FN (эти медианы как раз и будут соответствующими, так как они проведены из соответствующих вершин). Покажем, что $CM = FN$.

Рассмотрим треугольники ACM и DFN. Имеем:

1. $AC = DF$ как соответствующие стороны равных треугольников ABC и DEF;
2. $AM = DN$ как половины соответствующих (и потому равных) сторон AB и DE равных треугольников ABC и DEF;
3. $\angle A = \angle D$ как соответствующие углы равных треугольников ABC и DEF.

Следовательно, треугольники ACM и DFN равны по первому признаку (по двум сторонам и углу между ними). Стороны CM и FN этих треугольников являются соответствующими, так как они лежат напротив соответствующих вершин. Значит, $CM = FN$, что и требовалось.

Биссектриса треугольника — это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой на противолежащей стороне.

На рис. 6 изображена биссектриса CL треугольника ABC.

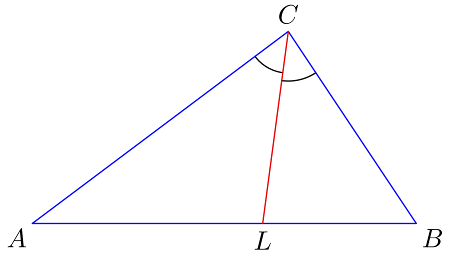

Рис. 6. Биссектриса треугольника

Высота треугольника — это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону.

В отличие от медианы и биссектрисы (которые всегда расположены внутри треугольника), высота может идти как внутри, так и вне треугольника; она может также совпасть с его стороной (рис. 7).

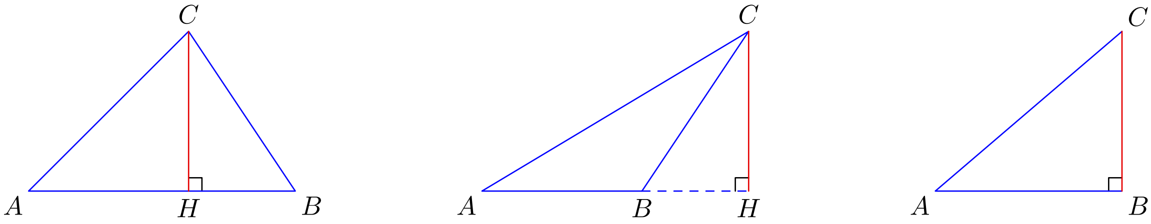

Рис. 7. Высота треугольника

Мы видим, что если углы A и B острые, то высота CH расположена внутри треугольника ABC; если угол B тупой, то высота CH проходит вне треугольника; если же угол B прямой, то высота, опущенная из вершины C, совпадает со стороной CB.

Равнобедренный треугольник

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Эти две равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона — *основанием* треугольника.

Если все стороны треугольника равны, то такой треугольник называется *равносторонним* (или *правильным*).

На рис. 8 изображён равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и боковыми сторонами AC и BC.

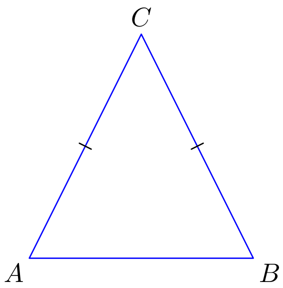

Рис. 8. Равнобедренный треугольник

Справедливы два важных утверждения, которые неоднократно применяются при решении задач. Эти утверждения являются обратными друг к другу.

Свойство равнобедренного треугольника. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Признак равнобедренного треугольника. Если два угла треугольника равны, то треугольник является равнобедренным (при этом равные стороны лежат напротив равных углов).

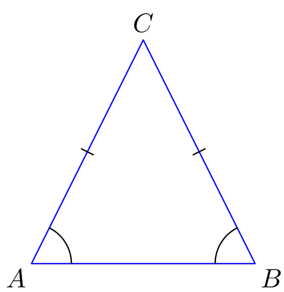

Рис. 9.

Обе ситуации одновременно показаны на рис. 9. Свойство равнобедренного треугольника утверждает, что если $AC = BC$, то $\angle A = \angle B$.

Признак равнобедренного треугольника, наоборот, позволяет «опознать» равнобедренный треугольник по равным углам. Согласно данному признаку из равенства $\angle A = \angle B$ следует, что треугольник равнобедренный: $AC = BC$.

Прямоугольный треугольник

Треугольник называется *прямоугольным*, если в нём имеется прямой угол. Стороны, образующие прямой угол, называются *катетами*; сторона, лежащая напротив прямого угла, называется *гипотенузой* (рис. 10).

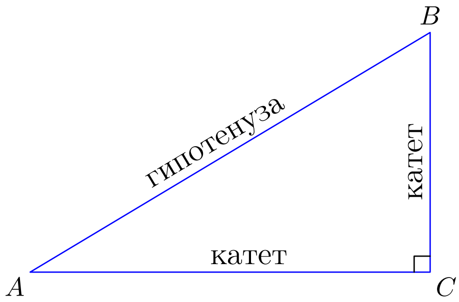

Рис. 10. Прямоугольный треугольник

За счёт наличия прямого угла равенство прямоугольных треугольников можно опознать по совпадению *двух* определённых элементов. Имеют место следующие признаки равенства прямоугольных треугольников.

1. (*По двум катетам*). Если два катета одного прямоугольного треугольника равны соответственно двум катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. (*По катету и прилежащему острому углу*). Если катет и прилежащий острый угол одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и прилежащему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. (*По катету и противолежащему углу*). Если катет и противолежащий угол одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и противолежащему углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

4. (*По гипотенузе и острому углу*). Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника равны соответственно гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

5. (*По гипотенузе и катету*). Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны соответственно гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны.

Полезное упражнение — доказать эти признаки, то есть вывести их из общих признаков равенства треугольников. Вы это сделаете в задачах к данному листку.

Задачи

1. Две прямые пересекаются в точке A. На одной прямой взяты точки B и C, а на другой — точки D и E так, что $AB = AC$ и $AD = AE$. Докажите, что $BD = CE$.

2. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему острому углу.

3. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие биссектрисы равны.

4. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Известно, что $AO = OC$ и $\angle BAO = \angle DCO$. Докажите, что треугольники BAO и DCO равны.

5. Отрезки AB и CD, пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите равенство треугольников AOC и BOD.

6. *Свойство равнобедренного треугольника.* В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, совпадает с биссектрисой и высотой. Докажите.

7. *Признак равнобедренного треугольника.* Если в треугольнике медиана является высотой, то треугольник равнобедренный. Докажите.

8. *Признак равнобедренного треугольника.* Если в треугольнике биссектриса является высотой, то треугольник равнобедренный. Докажите.

9. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите равенство треугольников ACD и BCD.

10. Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) биссектрисы, проведённые из вершин основания, равны; б) медианы, проведённые из вершин основания, равны.

11. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC взяты точки D, E, F так, что $AD = BE = CF$. Докажите, что треугольник DEF также равносторонний.

12. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$ и медиана AM перпендикулярна биссектрисе BL. Найдите BC.

$\boxed{4}$

13. Прямая, проведённая через вершину A треугольника ABC перпендикулярно медиане CM, делит эту медиану пополам. Найдите $AC : AB$.

$\boxed{1 : 2}$

14. Отрезки AB и CD пересекаются под прямым углом и $AC = AD$. Докажите, что $BC=BD$.

15. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M до точки N так, что $MN = AM$. Найдите BN и CN, если $AB = 2$, $AC = 3$.

$\boxed{BN = 3,\ CN = 2}$

16. *Признак равнобедренного треугольника.* Если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник равнобедренный. Докажите.

17. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников: а) по гипотенузе и катету; б) по гипотенузе и острому углу; в) по катету и противолежащему углу.

18. Докажите, что в равных треугольниках соответствующие высоты равны.

19. Все стороны четырёхугольника равны. Докажите, что его диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

20. Две высоты треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

21. Высоты AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке H, причём $AH = BH$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

22. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = DO$. Докажите равенство треугольников ABC и DBC.

23. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла B. Эти прямые пересекаются с прямыми BC и AB в точках K и M соответственно, причём $BM = 8$, $KC = 1$. Найдите AB.

7 или 9

24. а) Две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника. Обязательно ли такие треугольники равны? б) Сторона и два угла одного треугольника равны стороне и двум углам другого треугольника. Обязательно ли такие треугольники равны?

а) нет; б) нет

25. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120°$ проведены биссектрисы AK, BL и CM. Докажите, что $\angle KLM = 90°$.