Призма

Призма встречается в задачах по стереометрии столь же часто, как и пирамида. Цель данной статьи — ввести основную терминологию, связанную с понятием призмы.

Рассмотрим в пространстве треугольник ABC. Предположим, что треугольник $A_1B_1C_1$ лежит в плоскости, параллельной плоскости ABC, и получается из треугольника ABC параллельным сдвигом. Соединим соответствующие вершины — A и A_1, B и B_1, C и C_1 — и получим *треугольную призму* $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1).

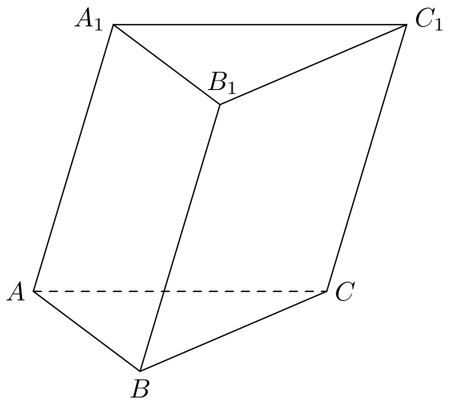


Рис. 1. Треугольная призма

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *основаниями* призмы. Три параллелограмма ABB_1A_1, BCC_1B_1 и ACC_1A_1 — это *боковые грани* призмы. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — это *боковые рёбра* призмы.

Таким образом, основания треугольной призмы — равные треугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковые грани — параллелограммы.

Аналогично получается *четырёхугольная призма* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).

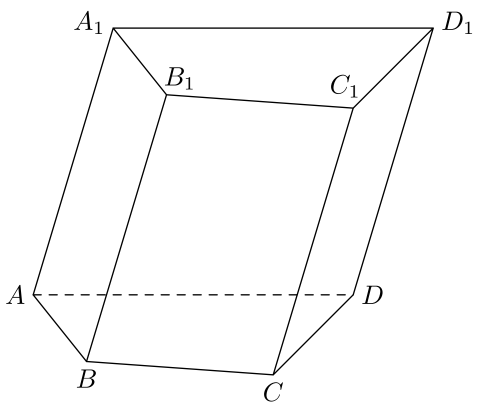


Рис. 2. Четырёхугольная призма

Основаниями этой призмы служат равные четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащие в параллельных плоскостях. Боковые грани призмы — снова параллелограммы. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 — боковые рёбра призмы.

Вообще, *в n-угольной призме основаниями служат равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковые грани являются параллелограммами*. Боковые рёбра призмы, будучи параллельными сторонами параллелограммов, равны друг другу.

На приведённых выше рисунках боковые рёбра призмы наклонены к плоскостям оснований: обе призмы являются *наклонными*. Однако в задачах и на практике (в оптике, например) наиболее часто встречается *прямая* призма.

Прямая призма

Прямая призма — это призма, боковые рёбра которой перпендикулярны плоскостям оснований.

На рис. 3 изображены две прямые призмы — треугольная и четырёхугольная.

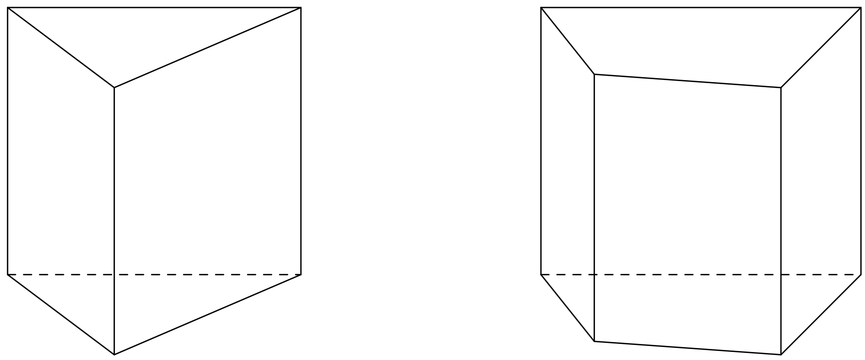


Рис. 3. Прямая призма

Как видите, боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

Правильная призма

Правильная n-угольная призма — это прямая призма, основанием которой служит правильный n-угольник.

На рис. 4 изображены две правильные призмы — треугольная и четырёхугольная. Штрихи на равных отрезках поставлены исключительно для наглядности — на рисунках в задачах их можно не ставить.

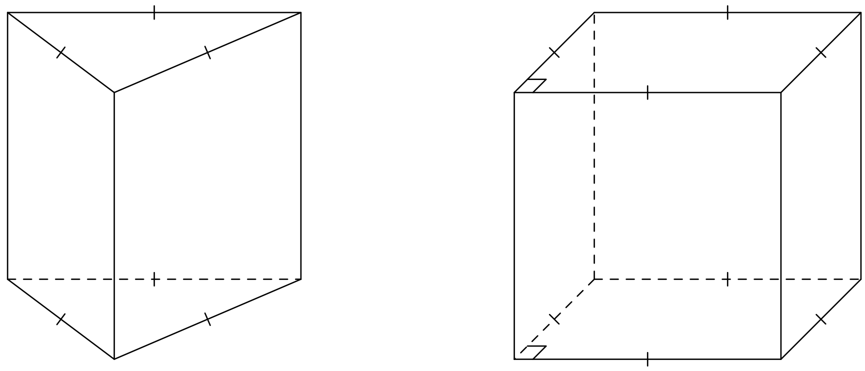


Рис. 4. Правильная призма

Поскольку эти случаи встречаются часто, мы специально для них конкретизируем общее определение.

- **Правильная треугольная призма** — это прямая призма, основанием которой является равносторонний треугольник.

- **Правильная четырёхугольная призма** — это прямая призма, основанием которой является квадрат.

  Если боковое ребро правильной четырёхугольной призмы равно стороне основания, то получается хорошо известный вам **куб**.

Вы видите, что боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.

На ЕГЭ по математике в задачах C2 попадается правильная шестиугольная призма. Посмотрите, как её надо рисовать (рис. 5).

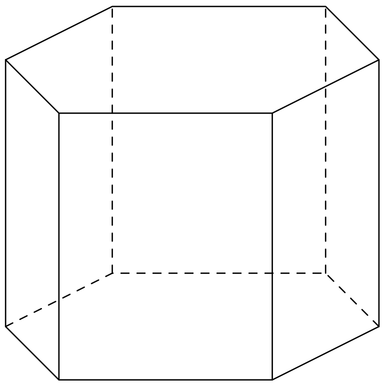
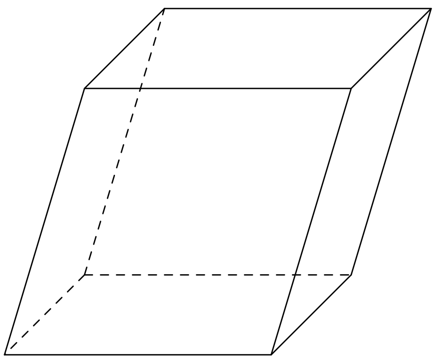


Рис. 5. Правильная шестиугольная призма

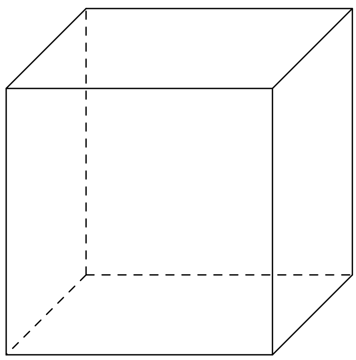
Параллелепипед

Параллелепипед — это призма, основанием которой служит параллелограмм.

Таким образом, все грани параллелепипеда являются параллелограммами. На рис. 6 изображены *наклонный параллелепипед* (боковые рёбра которого наклонены к плоскости основания) и *прямой параллелепипед* (боковые рёбра которого перпендикулярны плоскости основания).



Наклонный параллелепипед



Прямой параллелепипед

Рис. 6. Параллелепипед

Подчеркнём, что в основании (прямого) параллелепипеда может лежать какой угодно параллелограмм. Особый интерес представляет следующий частный случай.

Прямоугольный параллелепипед — это прямая призма, в основании которой лежит прямоугольник.

Изображается прямоугольный параллелепипед точно так же, как и прямой параллелепипед на рис. 6 (ведь на таких чертежах невозможно передать информацию о величине углов).

Диагональю параллелепипеда называется отрезок, который соединяет вершины параллелепипеда, на принадлежащие одной грани. Всего у параллелепипеда восемь вершин, так что имеются четыре диагонали (рис. 7).

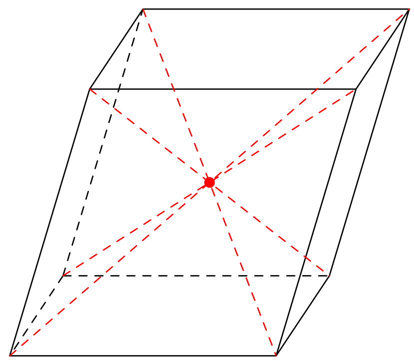


Рис. 7. Диагонали параллелепипеда

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке, которая является центром симметрии параллелепипеда.

Объём и площадь поверхности призмы

Объём призмы вычисляется по формуле:

$$V = Sh,$$

где S — площадь основания призмы, h — её высота. При этом *высотой* призмы называется общий перпендикуляр к основаниям призмы (а также длина этого перпендикуляра, рис. 8).

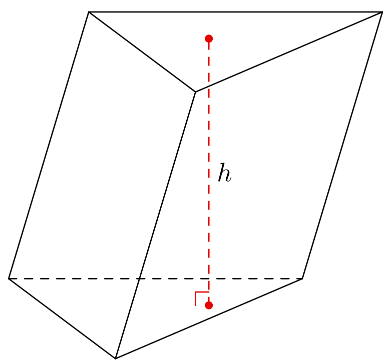


Рис. 8. Высота призмы

У прямой призмы высота совпадает с боковым ребром.

Особенно просто вычисляется объём прямоугольного параллелепипеда. Если его боковое ребро равно c, а в основании лежит прямоугольник со сторонами a и b, то площадь основания $S = ab$, и тогда объём:

$$S = abc.$$

Площадь боковой поверхности призмы — это сумма площадей её боковых граней.

Площадь поверхности призмы — это сумма площадей всех её граней. Ясно, что площадь поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площадей двух оснований.

Никаких формул для площади боковой или полной поверхности мы приводить не будем. Запоминать их смысла нет — лучше вычислять эти площади непосредственно в каждой конкретной задаче.