

## Призма

1. (МГУ, ДВИ, 2014.7) В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна  $\sqrt{2}$ . Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

$$\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

2. (МГУ, ДВИ, 2015.7) В правильную треугольную призму с основаниями  $ABC$ ,  $A'B'C'$  и рёбрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми  $AE$  и  $BD$  равно  $\sqrt{13}$ , где  $E$  и  $D$  — точки, лежащие на  $A'B'$  и  $B'C'$  соответственно, и  $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$ .

$$\frac{9}{13}$$

3. («Физтех», 2016.7) Дана прямая треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Сфера с диаметром  $AC$  пересекает рёбра  $AB$  и  $BC$  соответственно в точках  $F$  и  $N$ , отличных от вершин призмы. Отрезки  $C_1F$  и  $A_1N$  пересекаются в точке  $P$ , и при этом  $A_1N = 7$ ,  $C_1P = 6$ .

а) Найдите угол  $PFA$ .

б) Найдите отношение  $AF : FB$ .

в) Пусть дополнительно известно, что  $AB = 6$ . Найдите объём призмы.

$$90\sqrt{10} \text{ (а); } 5 : 6 \text{ (б); } 21\sqrt{10} \text{ (в)}$$

4. («Физтех», 2016.7) Высота правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна 12. Сфера  $\Omega$  радиуса  $\sqrt{35/3}$  касается всех боковых граней призмы. На отрезках  $AA_1$  и  $BB_1$  выбраны соответственно точки  $K$  и  $L$  такие, что  $KL \parallel AB$ , а плоскости  $KBC$  и  $LA_1C_1$  касаются сферы  $\Omega$ . Найдите объём призмы и длину отрезка  $AK$ .

$$V = 420\sqrt{3}; AK = 8 \text{ или } KV = 4$$

5. (МФТИ, 1996.5) В основании призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит прямоугольник  $ABCD$ . Острые углы  $D_1DA$  и  $D_1DC$  равны между собой, угол между ребром  $D_1D$  и плоскостью основания призмы равен  $\arccos \frac{1}{\sqrt{13}}$ , а  $CD = 5\sqrt{6}$ . Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найдите длину  $BC$ , угол между плоскостями  $D_1DC$  и  $ABC$ , а также расстояние от точки  $D$  до центра сферы.

$$BC = 5\sqrt{6}; \arccos \frac{5}{12}$$

6. («Ломоносов», 2008.8) Основанием прямой призмы  $ABCA'B'C'$  служит прямоугольный треугольник с катетами  $AB = 6$  и  $AC = 5$ . Через середину бокового ребра  $CC' = 4$  параллельно  $AB$  проведена прямая  $l$ . Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины — точки  $A$  и  $C$ , а остальные вершины лежат на прямых  $A'B$  и  $l$  соответственно?

$$5\sqrt{13} \text{ или } 5\sqrt{58}$$

7. (МГУ, мехмат, 2001-03.5) Основанием прямой призмы  $ABCA'B'C'$  с высотой  $\frac{4}{7}$  служит треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = BC = 1$  и  $AC = \frac{3}{7}$ . Через точку пересечения диагоналей грани  $ACC'A'$  на расстоянии  $\frac{4}{13}$  от точки  $A$  проводится плоскость, делящая объём призмы пополам. Какова наибольшая площадь сечения призмы такой плоскостью?

$$\frac{529}{169}\sqrt{187}$$

8. (*Всеросс., 2018, финал, 11.6*) Три диагонали правильной  $n$ -угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке  $O$ . Докажите, что точка  $O$  — центр призмы. (Диагональ призмы — это отрезок, соединяющий две её вершины, не находящиеся в одной грани.)
9. (*Турнир городов, 2001, 10–11*) В каждой боковой грани пятиугольной призмы есть угол  $\varphi$  (среди углов этой грани). Найдите все возможные значения  $\varphi$ .
10. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) При каких  $n$  можно раскрасить в три цвета все ребра  $n$ -угольной призмы (основания —  $n$ -угольники) так, что в каждой вершине сходятся все три цвета и у каждой грани (включая основания) есть стороны всех трёх цветов?
11. (*Турнир городов, 2002, 10–11*) Существует ли правильная треугольная призма, которую можно оклеить (без наложений) различными равносторонними треугольниками? (Разрешается перегибать треугольники через рёбра призмы.)
12. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2016, 10–11*) В выпуклой  $n$ -угольной призме равны все боковые грани. При каких  $n$  эта призма обязательно прямая?