Простые числа

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 8.1, 9.1*) Найдите какое-нибудь такое девятизначное число N, состоящее из различных цифр, что среди всех чисел, получающихся из N вычеркиванием семи цифр, было бы не более одного простого.

1.2. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 9.5*) Найдите все такие простые числа p, что число p^2+11 имеет ровно шесть различных делителей (включая единицу и само число).

1.3. (*Всеросс., 2007, ОЭ, 8.3, 9.2*) Существуют ли такие простые числа p_1, p_2, $\ldots$, p_{2007}, что p_1^2-1 делится на p_2, p_2^2-1 делится на p_3, $\ldots$, p_{2007}^2-1 делится на p_1?

1.4. (*Всеросс., 2015, РЭ, 9.2*) Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

1.5. (*Всеросс., 2018, РЭ, 9.8*) Серёжа выбрал два различных простых числа p и q. Он считает натуральное число n *хорошим*, если число $p+q$ можно представить в виде суммы ровно q чисел, каждое из которых имеет вид n^k при целом неотрицательном k. (Например, если бы Серёжа выбрал $p=7$ и $q=3$, то он бы счёл число $n=2$ хорошим, поскольку $7+3=2^3+2^0+2^0$.) Докажите, что Серёжа считает хорошими не более двух чисел.

1.6. (*Всеросс., 2007, ОЭ, 11.5*) При каких натуральных n найдутся такие целые a, b, c, что их сумма равна нулю, а число $a^n+b^n+c^n$ — простое?

1.7. (*Всеросс., 1993, ЗЭ, 9.1, 11.1*) Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами. Может ли при этом число $5n+3$ быть простым?

1.8. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 9.1*) Пусть a_1, a_2, a_3, $\ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а p_1, p_2, p_3, $\ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n-a_k=p_n-p_k$. Докажите, что все числа a_1, a_2, $\ldots$ простые.

1.9. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 9.5, 10.5*) К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

1.10. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 8.7*) Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3-q^5=(p+q)^2$.

1.11. (*Всеросс., 2007, ОЭ, 8.7*) Для натурального $n>3$ будем обозначать через $n?$ (*n-вопросиал*) произведение всех простых чисел, меньших n. Решите уравнение $n?=2n+16$.

1.12. (*Всеросс., 2018, РЭ, 10.8, 11.8*) Докажите, что найдётся такое натуральное число $n>10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

1.13. (*Всеросс., 1993, ЗЭ, 10.1*) Длины сторон треугольника — простые числа. Докажите, что его площадь не может быть целым числом.

1.14. (*Всеросс., 2011, РЭ, 9.7*) Найдите все такие тройки простых чисел p, q, r, что четвёртая степень каждого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

1.15. (*Всеросс., 1994, РЭ, 9.7*) Найдите все такие простые числа p, q, r и s, что их сумма — простое число, а числа p^2+qs и p^2+qr — квадраты натуральных чисел. (Числа p, q, r и s предполагаются различными.)

1.16. (*Всеросс., 2009, ЗЭ, 9.6*) Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?

1.17. (*Всеросс., 2009, РЭ, 9.8*) Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1=2$, $S_2=2+3=5$, $S_3=2+3+5=10$, … Могут ли два подряд идущих члена последовательности (S_n) оказаться квадратами натуральных чисел?

1.18. (*Всеросс., 2008, ЗЭ, 11.3*) Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдётся такое натуральное число x, что оно представляется в виде $x=a^p+b^p$ (с натуральными a, b) при всех $p\in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p\notin P$.

2 Московская математическая олимпиада

2.1. (*ММО, 2013, 8.1*) Ваня записал несколько простых чисел, использовав ровно по одному разу все цифры от 1 до 9. Сумма этих простых чисел оказалась равной 225. Можно ли, использовав ровно по одному разу те же цифры, записать несколько простых чисел так, чтобы их сумма оказалась меньше?

2.2. (*ММО, 2007, 9.3*) Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

2.3. (*ММО, 2013, 11.2*) Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p+1$ делится на q, а $7q+1$ делится на p.

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2014.1*) Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных трёхзначных чисел на простые множители входит не больше 23 различных простых чисел.

3.2. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2010.1*) Занумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ... Может ли среднее арифметическое $(p_1 + \ldots + p_n)/n$ при каком-нибудь $n \geqslant 2$ быть простым числом?

3.3. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2012.4*) *Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа. С составным натуральным числом a разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011?

3.4. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2014.8*) Дано 2014 попарно различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть равно произведению шести попарно различных простых чисел.

3.5. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2018.10*) Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{100}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

3.6. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2013.7*) На доске в строчку написано n подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Под каждым из этих чисел написан его делитель, меньший этого числа и больший 1. Оказалось, что эти делители тоже образуют строчку подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Докажите, что каждое из исходных чисел больше, чем $\frac{n^k}{p_1 p_2 \ldots p_k}$, где p_1, p_2, ..., p_k — все простые числа, меньшие n.

4 «Физтех»

4.1. (*«Физтех», 2011, 10–11*) Простые числа p, q, r таковы, что $p+q+r = 118$, $pq+qr+rp = 2075$. Найдите pqr.

$\boxed{3686}$

5 «Курчатов»

5.1. (*«Курчатов», 2018, 8.3*) Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

5.2. (*«Курчатов», 2017, 9.4*) Найдите все пары натуральных чисел x и y, таких что отношение $\frac{xy^3}{x+y}$ является простым числом.