Примеры и конструкции

1. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 8.1*) Представьте число 2017 в виде суммы пяти натуральных чисел так, чтобы все цифры, использованные в этих пяти числах, были различны.

2. (*«Ломоносов», 2018, 5–6.2, 7–8.2*) Первокласник Петя выкладывал из имеющихся у него фишек контур равностороннего треугольника так, что каждая его сторона, включая вершины, содержит одинаковое число фишек. Затем из тех же фишек ему удалось таким же образом выложить контур квадрата. Сколько фишек у Пети, если сторона квадрата содержит на две фишки меньше, чем сторона треугольника?

24

3. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1*) Найдите две положительные несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими 100, сумма которых равна 86/111.

4. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Можете ли вы с помощью четырёх арифметических действий (также можно использовать скобки) записать число 2016, используя последовательно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

5. (*«Ломоносов», 2016, 5–6.5, 7–8.5*) Расставьте знаки умножения и деления вместо звёздочек в выражении

$$1 * 3 * 3^2 * 3^4 * 3^8 * 3^{16} * 3^{32} * 3^{64} = 3^{99}$$

таким образом, чтобы равенство стало верным.

6. (*«Высшая проба», 2014, 7.1, 8.1*) В выражение

$$(* * + *)(* * + *) = * * * *$$

вставьте цифры вместо звёздочек так, чтобы получилось верное равенство и было использовано не более четырёх различных цифр. (Число не может начинаться с нуля.)

7. (*«Высшая проба», 2016, 7.1, 8.1*) В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке $9876 - 54 - 321$ получается 9501.)

8. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 8.1*) Подберите такие не равные нулю числа n и m, чтобы равенство

$$(n \cdot 5^n)^n = m \cdot 5^9$$

было верным.

9. (*Всеросс., 2017, МЭ, 8.2*) Расставьте в левой части равенства

$$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} \quad \frac{1}{a} = (a+1)(a-1)$$

знаки арифметических операций и скобки так, чтобы равенство стало верным для всех a, отличных от нуля.

10. (*ММО, 2014, 8.1*) Витя хочет найти такое выражение, состоящее из единиц, скобок, знаков «+» и «×», что

— его значение равно 10;

— если в этом выражении заменить все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», всё равно получится 10.

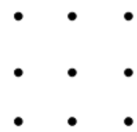
Приведите пример такого выражения.

11. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8.1*) В записи $* + * + * + * + * + * + * + * = **$ замените звёздочки различными цифрами так, чтобы равенство было верным.

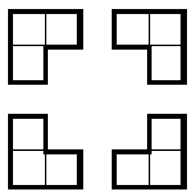
12. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 9.1*) Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записывании его цифр в обратном порядке (например, 626 — палиндром, а 2015 — нет). Представьте число 2015 в виде суммы двух палиндромов.

13. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 9.1*) В равенстве $1 - 2 - 4 - 8 - 16 = 19$ поставьте несколько знаков модуля так, чтобы оно стало верным.

14. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 9.1*) Отмечено 9 точек, как показано на рисунке. Нарисуйте два различных по форме семиугольника с вершинами в отмеченных точках. Для каждого семиугольника сделайте отдельный чертёж.



15. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 10.1*) В таблице 3×3 записаны числа, как показано на рисунке. За ход разрешается выбрать три клетки в форме трёхклеточного уголка и уменьшить число в каждой из них на 1. Покажите, как такими операциями сделать таблицу, в которой во всех клетках стоят нули.



0	8	3
7	11	10
3	9	0

16. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.1*) Сумму цифр шестизначного числа умножили на произведение его цифр. Получилось 390. Найдите хотя бы одно такое шестизначное число.

17. (*ММО, 2003, 8.2*) Придумайте десятизначное число, в записи которого нет нулей, такое, что при прибавлении к нему произведения его цифр получается число с таким же произведением цифр.

18. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2010.2*) Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.

19. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2017.2*) Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трёх из них — делится.

20. (*ММО, 2003, 9.2*) Произведение пяти чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом их произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел.

21. (*Всеросс., 2006, РЭ, 8.1, 9.1*) Найдите какое-нибудь такое девятизначное число N, состоящее из различных цифр, что среди всех чисел, получающихся из N вычеркиванием семи цифр, было бы не более одного простого.

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9.6*) Даны n различных составных натуральных чисел a_1, $\ldots$, a_n, принадлежащих интервалу $(1; 2013)$. Известно, что для любых двух различных чисел a_i, a_j из этого набора выполнено условие $\text{НОД}(a_i, a_j) = 1$.

а) Приведите пример такого набора для $n = 14$.

б) Докажите, что не существует такого набора, содержащего 15 чисел.

23. (*«Высшая проба», 2015, 10.5, 11.4*) Приведите пример функции $f(x)$, для которой выполняются все три перечисленных ниже условия:

- область определения функции $f(x)$ — множество всех дейстительных чисел $\mathbb{R}$;
- при любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = b$ имеет ровно одно решение;
- при любом $a > 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = ax + b$ имеет не менее двух решений.