Принцип Дирихле

1. (*«Надежда энергетики», 2022, 7.2*) Верно ли, что среди любых восьми целых чисел можно выбрать два, разность которых кратна семи?

2. (*«Ломоносов», 2014, 7.2*) Найдите наименьшее целое $n > 3$, при котором не существует выпуклого n-угольника, каждый внутренний угол которого составляет чётное число градусов.

3. (*Московская устная олимпиада, 2017, 7.2*) На кружок пришли четыре мальчика из 7А и четыре — из 7Б: три Лёши, три Вани и два Артёма. Могло ли оказаться так, что у каждого из них есть хотя бы один тёзка-одноклассник, пришедший на кружок?

4. (*Московская устная олимпиада, 2011, 7.3*) Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежали одному ребёнку, а среди любых пяти носков не более трёх имели одного хозяина. Сколько могло быть детей и сколько носков могло принадлежать каждому ребёнку?

5. (*Московская устная олимпиада, 2019, 7.3*) В магазине «Всё для путешествий» продаются 20 плееров по цене от 500 до 800 рублей и 20 наушников по цене от 50 до 140 рублей. Известно, что любой один предмет стоит целое число рублей и никакие два не стоят одинаково. Докажите, что два покупателя смогут приобрести по одному плееру с наушниками, потратив одинаковое количество денег.

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.5, 9.4*) В правильном 2017-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

7. (*«Ломоносов», 2017, 5–6.5*) На окружности отмечено 25 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причём у любого отрезка один конец синий, а другой — красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

8. (*«Ломоносов», 2017, 7–8.4*) На окружности отмечено 100 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причём у любого отрезка один конец синий, а другой — красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

9. (*Математический праздник, 2019, 6.5*) Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев: 1009 сосен и 1010 елок. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растет сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растет сосна.

10. (*Математический праздник, 1994, 6.7*) Среди любых десяти из шестидесяти школьников найдётся три одноклассника. Обязательно ли среди всех шестидесяти школьников найдётся

а) 15 одноклассников;

б) 16 одноклассников?

11. (*Математический праздник, 1994, 7.6*) В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.