Угол между плоскостями

Величину угла между двумя различными плоскостями можно определить для любого взаимного расположения плоскостей.

Тривиальный случай — если плоскости параллельны. Тогда угол между ними считается равным нулю.

Нетривиальный случай — если плоскости пересекаются. Этому случаю и посвящено дальнейшее обсуждение. Сначала нам понадобится понятие двугранного угла.

Двугранный угол

Двугранный угол — это две полуплоскости с общей прямой (которая называется *ребром* двугранного угла). На рис. 1 изображён двугранный угол, образованный полуплоскостями π и σ; ребром этого двугранного угла служит прямая a, общая для данных полуплоскостей.

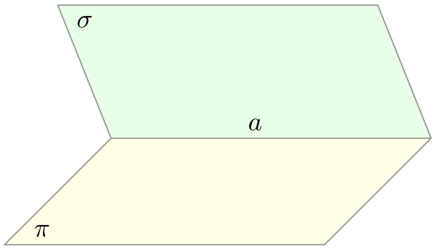

Рис. 1. Двугранный угол

Двугранный угол можно измерять в градусах или радианах — словом, ввести угловую величину двугранного угла. Делается это следующим образом.

На ребре двугранного угла, образованного полуплоскостями π и σ, возьмём произвольную точку M. Проведём лучи MA и MB, лежащие соответственно в данных полуплоскостях и перпендикулярные ребру (рис. 2).

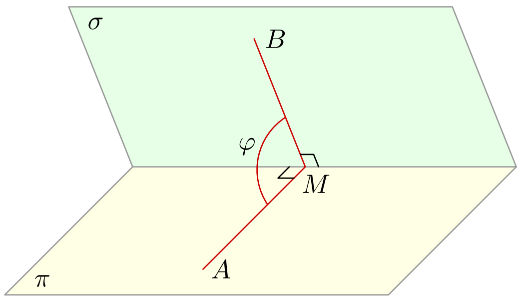

Рис. 2. Линейный угол двугранного угла

Полученный угол AMB — это *линейный угол двугранного угла*. Угол $\varphi = \angle AMB$ как раз и является угловой величиной нашего двугранного угла.

Определение. Угловая величина двугранного угла — это величина линейного угла данного двугранного угла.

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу (ведь они получаются друг из друга параллельным сдвигом). Поэтому данное определение корректно: величина φ не зависит от конкретного выбора точки M на ребре двугранного угла.

Определение угла между плоскостями

При пересечении двух плоскостей получаются четыре двугранных угла. Если все они имеют одинаковую величину (по 90°), то плоскости называются *перпендикулярными*; угол между плоскостями тогда равен 90°.

Если не все двугранные углы одинаковы (то есть имеются два острых и два тупых), то углом между плоскостями называется величина *острого* двугранного угла (рис. 3).

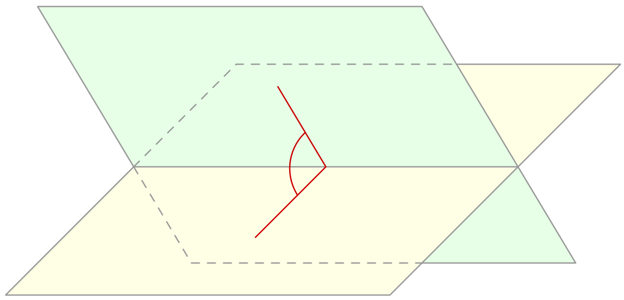

Рис. 3. Угол между плоскостями

Примеры решения задач

Разберём три задачи. Первая — простая, вторая и третья — примерно на уровне С2 на ЕГЭ по математике.

Задача 1. Найдите угол между двумя гранями правильного тетраэдра.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Проведём медианы AM и DM соответствующих граней, а также высоту тетраэдра DH (рис. 4).

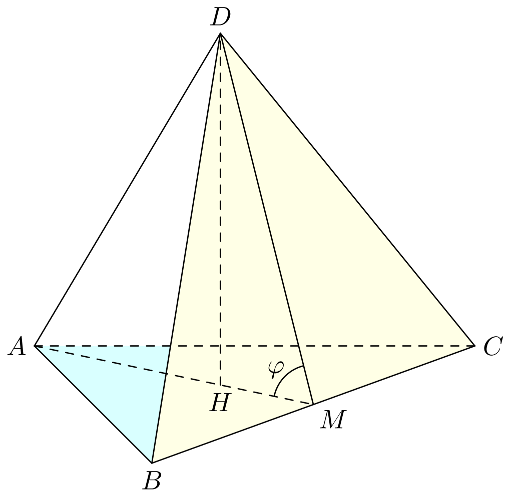

Рис. 4. К задаче 1

Будучи медианами, AM и DM являются также высотами равносторонних треугольников ABC и DBC. Поэтому угол $\varphi = \angle AMD$ есть линейный угол двугранного угла, образованного гранями ABC и DBC. Находим его из треугольника DHM:

$$\cos\varphi = \frac{HM}{DM} = \frac{\frac{1}{3}AM}{DM} = \frac{1}{3}\,.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

Задача 2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) боковое ребро равно стороне основания. Точка K — середина ребра SA. Найдите угол между плоскостями KBC и ABC.

Решение. Прямая BC параллельна AD и тем самым параллельна плоскости ADS. Поэтому плоскость KBC пересекает плоскость ADS по прямой KL, параллельной BC (рис. 5).

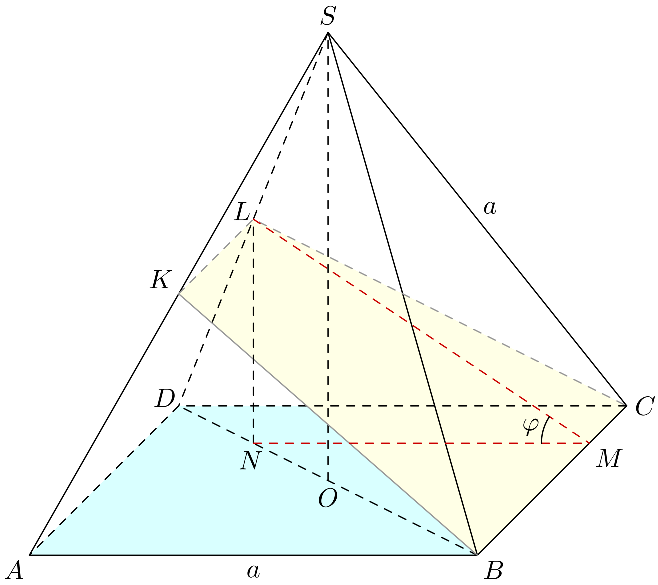

Рис. 5. К задаче 2

При этом KL будет также параллельна прямой AD; следовательно, KL — средняя линия треугольника ADS, и точка L — середина DS.

Проведём высоту пирамиды SO. Пусть N — середина DO. Тогда LN — средняя линия треугольника DOS, и потому $LN \parallel SO$. Значит, LN — перпендикуляр к плоскости ABC.

Из точки N опустим перпендикуляр NM на прямую BC. Прямая NM будет проекцией наклонной LM на плоскость ABC. Из теоремы о трёх перпендикулярах следует тогда, что LM также перпендикулярна BC.

Таким образом, угол $\varphi = \angle LMN$ является линейным углом двугранного угла, образованного полуплоскостями KBC и ABC. Будем искать этот угол из прямоугольного треугольника LMN.

Пусть ребро пирамиды равно a. Сначала находим высоту пирамиды:

$$SO = \sqrt{DS^2 - DO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\,.$$

Тогда

$$LN = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}\,.$$

Далее, треугольник BMN подобен треугольнику BCD и $BN : BD = 3 : 4$. Стало быть,

$$MN = \frac{3}{4}CD = \frac{3a}{4}\,.$$

Теперь находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{LN}{MN} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно стороне основания. Точка K — середина ребра BB_1. Найдите угол между плоскостями A_1KC и ABC.

Решение. Пусть L — точка пересечения прямых A_1K и AB. Тогда плоскость A_1KC пересекает плоскость ABC по прямой CL (рис. 6).

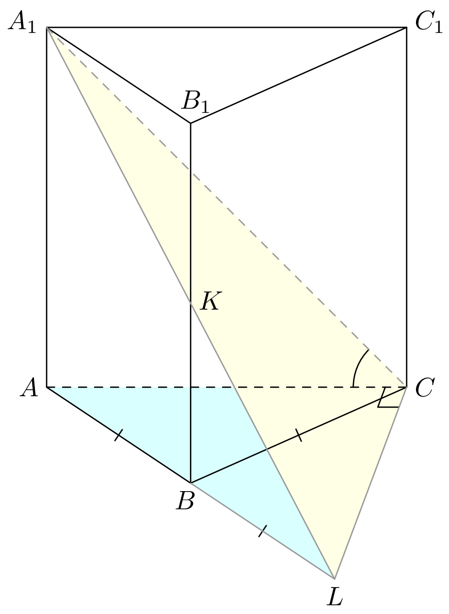

Рис. 6. К задаче 3

Треугольники A_1B_1K и KBL равны по катету и острому углу. Следовательно, равны и другие катеты: $A_1B_1 = BL$.

Рассмотрим треугольник ACL. В нём $BA = BC = BL$. Угол CBL равен $120°$; стало быть, $\angle BCL = 30°$. Кроме того, $\angle BCA = 60°$. Поэтому $\angle ACL = \angle BCA + \angle BCL = 90°$.

Итак, $LC \perp AC$. Но прямая AC служит проекцией прямой A_1C на плоскость ABC. По теореме о трёх перпендикулярах заключаем тогда, что $LC \perp A_1C$.

Таким образом, угол A_1CA — линейный угол двугранного угла, образованного полуплоскостями A_1KC и ABC. Это и есть искомый угол. Из равнобедренного прямоугольного треугольника A_1AC мы видим, что он равен $45°$.

Ответ: $45°$