

## Взаимное расположение плоскостей

Две различные прямые на плоскости или параллельны, или пересекаются. Точно так же две различные плоскости в пространстве либо параллельны, либо пересекаются (рис. 1).

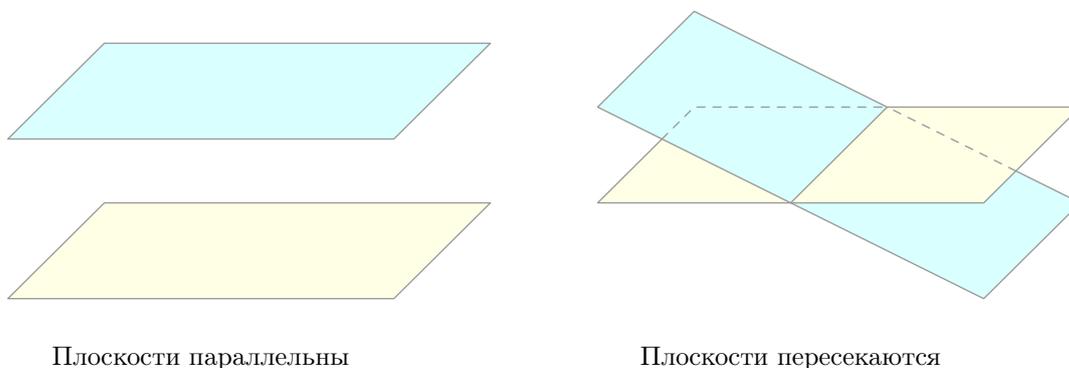


Рис. 1. Взаимное расположение плоскостей

## Параллельность плоскостей

**Определение.** Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Предположим, в некоторой задаче нам хотелось бы доказать, что некоторые плоскости параллельны. Как это сделать? Для такой цели имеется специальное утверждение.

**Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Мы видим эту ситуацию на рис. 2. Именно, пусть пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$ , лежащие в плоскости  $\pi$ , параллельны соответственно прямым  $a'$  и  $b'$ , лежащим в плоскости  $\sigma$ . Тогда плоскость  $\pi$  параллельна плоскости  $\sigma$ .

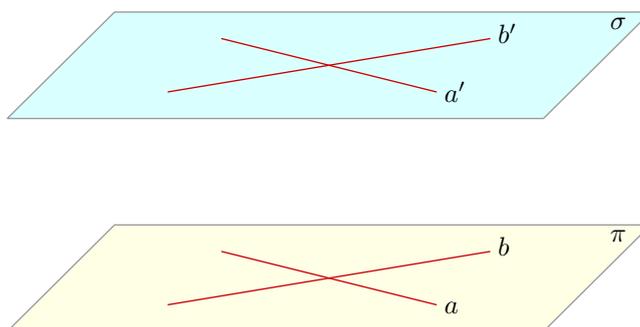


Рис. 2. Если  $a \parallel a'$  и  $b \parallel b'$ , то  $\pi \parallel \sigma$

*Вопрос.* Почему в формулировке признака параллельности плоскостей важно, что прямые *не-пересекающиеся*? Останется ли верным признак, если это слово убрать?

Доказывать признак параллельности плоскостей мы не будем — это теорема из школьной программы, на которую можно сослаться на экзамене. Давайте лучше посмотрим, как работает данный признак в конкретной задаче.

**Задача.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что плоскости  $A_1 B C_1$  и  $A C D_1$  параллельны.

*Решение.* Делаем чертёж (рис. 3).

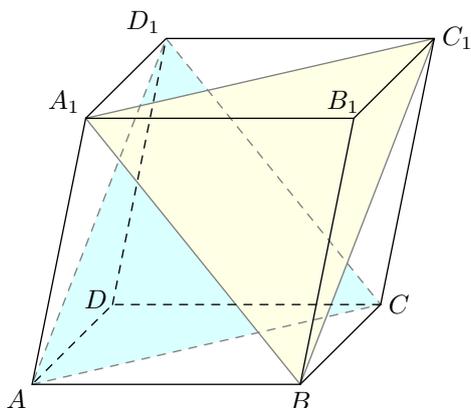


Рис. 3. К задаче

Четырёхугольник  $ABCD$  — параллелограмм, поэтому  $BC \parallel AD$  и  $BC = AD$ . Четырёхугольник  $ADD_1 A_1$  — также параллелограмм, поэтому  $A_1 D_1 \parallel AD$  и  $A_1 D_1 = AD$ . Имеем, таким образом:  $A_1 D_1 \parallel BC$  и  $A_1 D_1 = BC$ . Следовательно, четырёхугольник  $A_1 B C D_1$  является параллелограммом<sup>1</sup>, и потому  $A_1 B \parallel D_1 C$ .

Аналогично докажем, что четырёхугольник  $A B C_1 D_1$  — параллелограмм, и, стало быть,  $B C_1 \parallel A D_1$ .

Мы получили, что две пересекающиеся прямые плоскости  $A_1 B C_1$  (а именно,  $A_1 B$  и  $B C_1$ ) соответственно параллельны двум прямым плоскости  $A C D_1$  (а именно, прямым  $D_1 C$  и  $A D_1$ ). Следовательно, данные плоскости параллельны, что и требовалось.

Важное свойство параллельных плоскостей: *если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то прямые пересечения параллельны.*

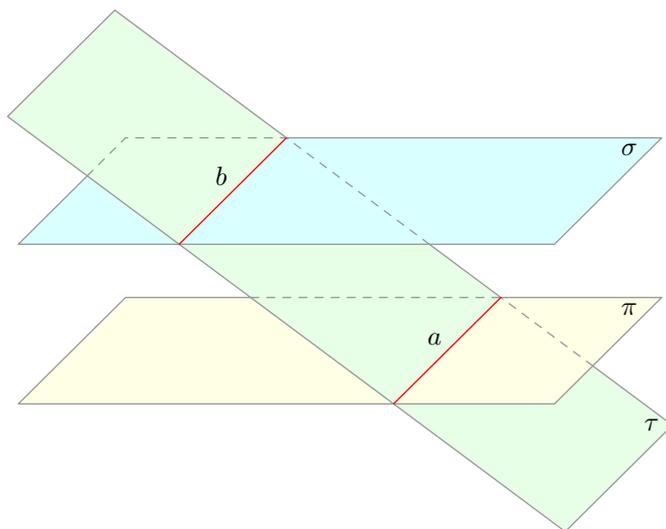


Рис. 4. Если  $\pi \parallel \sigma$ , то  $a \parallel b$

Именно, пусть плоскость  $\pi$  параллельна плоскости  $\sigma$  (рис. 4). Если плоскость  $\tau$  пересекает плоскость  $\pi$  по прямой  $a$  и пересекает плоскость  $\sigma$  по прямой  $b$ , то  $a \parallel b$ .

<sup>1</sup>Напомним соответствующий признак параллелограмма: *если в четырёхугольнике две стороны параллельны и равны, то такой четырёхугольник — параллелограмм.*

**Задача.** Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно 4. Точка  $K$  — середина ребра  $A_1 D_1$ . Найдите площадь сечения куба плоскостью  $ACK$ .

*Решение.* Секущая плоскость  $ACK$  пересекает плоскость  $ABC$  нижней грани куба по прямой  $AC$  (рис. 5). Плоскость  $A_1 B_1 C_1$  параллельна плоскости  $ABC$ ; следовательно, секущая плоскость пересекает плоскость  $A_1 B_1 C_1$  по прямой  $KM$ , параллельной  $AC$ .

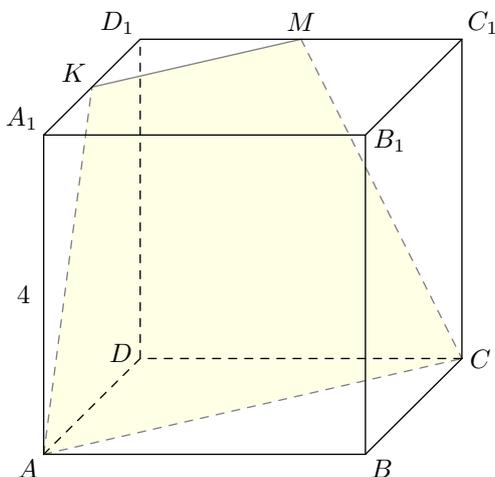


Рис. 5. К задаче

Плоскости  $ADD_1$  и  $CDD_1$  пересекаются секущей плоскостью по прямым  $AK$  и  $CM$  соответственно. Таким образом, сечение куба — трапеция  $AKMC$ , в которой

$$AC = 4\sqrt{2}, \quad AK = CM = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad KM = \frac{1}{2}A_1C_1 = 2\sqrt{2}.$$

Нарисуем эту трапецию отдельно (рис. 6). Проведём высоты  $KE$  и  $MF$ .

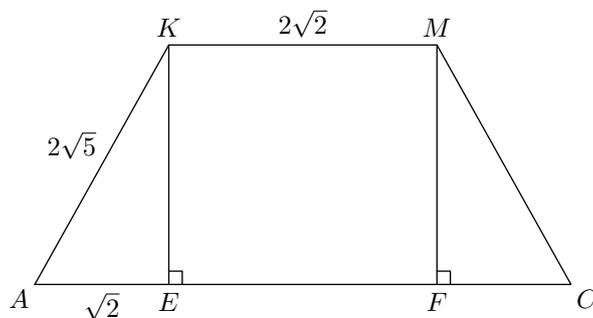


Рис. 6. Планиметрический чертёж сечения

Ясно, что

$$AE = CF = \frac{AC - KM}{2} = \sqrt{2}.$$

Тогда высота трапеции:

$$KE = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}.$$

Остаётся найти площадь трапеции:

$$S = \frac{AC + KM}{2} \cdot KE = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18.$$

Ответ: 18.

## Пересечение плоскостей

Выше мы неоднократно использовали утверждение о том, что одна плоскость пересекает другую по прямой. Это — одно из базовых утверждений стереометрии, которое нередко принимается в качестве аксиомы: *если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

Данное утверждение используется при построении сечений многогранников. Рассмотрим самый простой пример — сечение тетраэдра.

**Задача.** На рёбрах  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$  расположены соответственно точки  $K$ ,  $N$  и  $M$ , отличные от вершин тетраэдра (при этом прямые  $KN$  и  $AC$  не параллельны). Постройте сечение тетраэдра плоскостью  $KMN$ .

*Решение.* Сечение показано на рис. 7 — это четырёхугольник  $KLMN$ . Объясним, как выполнено построение.

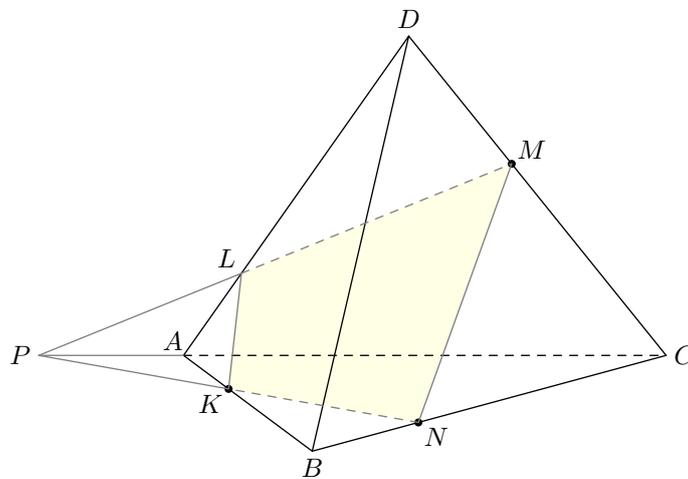


Рис. 7. Сечение тетраэдра

Грани  $ABC$  и  $BCD$  пересекаются секущей плоскостью  $KMN$  по отрезкам  $KN$  и  $MN$  соответственно.

Пересечением секущей плоскости и плоскости  $ABC$  служит прямая  $KN$ , которая пересекает прямую  $AC$  в точке  $P$ . Таким образом, точка  $P$  принадлежит одновременно секущей плоскости и плоскости  $ACD$ .

Точка  $M$  также является общей точкой секущей плоскости и плоскости  $ACD$ . Значит, секущая плоскость пересекает плоскость  $ACD$  по прямой  $PM$ .

Прямая  $PM$  пересекает  $AD$  в точке  $L$ . Остаётся провести  $KL$  и  $LM$ . В результате получается четырёхугольник  $KLMN$ , который и является искомым сечением.