Подобие треугольников

Понятие подобия геометрических фигур в сущности очень просто. Разглядывая предмет через лупу, мы видим увеличенное в несколько раз изображение этого предмета *с сохранением пропорций всех его размеров*; иными словами, изображение предмета *подобно* самому предмету.

Подобные треугольники — это треугольники, у которых углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны (при этом стороны называются соответствующими, если они лежат напротив равных углов).

На рис. 1 изображены подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Соответствующими сторонами являются: AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1. Обратите внимание, что стороны каждой из этих трёх пар лежат напротив равных углов.

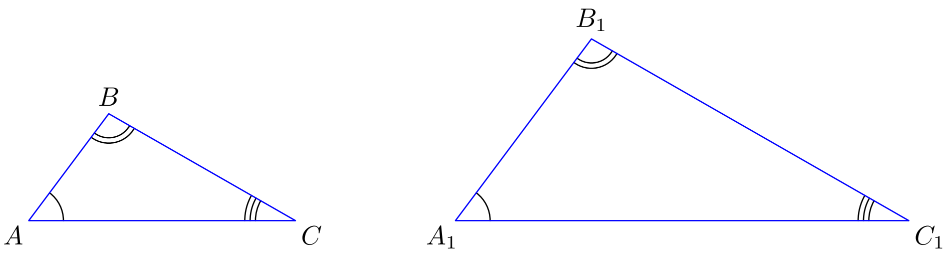

Рис. 1. Подобные треугольники

Подобие наших треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Выражение «соответствующие стороны пропорциональны» означает, что

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}\,.$$

Отношение соответствующих сторон называется *коэффициентом подобия* и обозначается k. Если, например, $k = 2$, то можно сказать, что один из подобных треугольников есть увеличенная в два раза копия другого треугольника.

Ясно, что если $k = 1$, то подобные треугольники равны. Таким образом, равенство треугольников есть частный случай подобия.

Признаки подобия треугольников

Оказывается, для установления подобия треугольников нет нужды проверять все требования определения подобия, данного выше (то есть, проверять как равенство углов, так и пропорциональность сторон). Для того, чтобы треугольники были подобны, достаточно выполнения меньшего набора условий.

Признак подобия треугольников (по двум углам). Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Таким образом, если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены равенства $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

При решении задач этот признак работает наиболее часто. Обратите внимание, что он оперирует всего с двумя элементами треугольников — а именно, с двумя углами.

В остальных двух признаках подобия треугольников фигурируют три элемента.

Признак подобия треугольников (по двум сторонам и углу между ними). Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Таким образом, если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены равенства

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \quad \text{и} \quad \angle B = \angle B_1,$$

то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Признак подобия треугольников (по трём сторонам). Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Таким образом, если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены равенства

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Отношение площадей подобных треугольников

Имеет место важный факт: **отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия**. Давайте посмотрим, почему так получается.

Рассмотрим два подобных треугольника (рис. 2). Пусть a и a_1 — соответствующие стороны этих треугольников, h и h_1 — высоты, проведённые к этим сторонам.

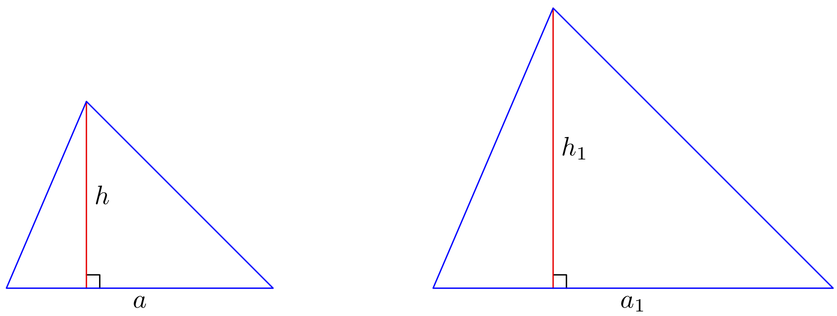

Рис. 2. К отношению площадей подобных треугольников

Пусть коэффициент подобия данных треугольников равен k, то есть $a_1 = ka$. Нетрудно видеть, что проведённые высоты также являются соответствующими элементами: $h_1 = kh$ (это следует из подобия по двум углам двух прямоугольных треугольников с катетами h и h_1; проведите данное рассуждение самостоятельно!). Для отношения площадей рассматриваемых треугольников получаем:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2}a_1h_1}{\frac{1}{2}ah} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{h_1}{h} = k \cdot k = k^2.$$

Таким образом, при «растяжении» треугольника в 3 раза его площадь увеличивается в $3^2 = 9$ раз.