Векторы в планиметрии

Задача 1. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 10*) Точка O — центр квадрата $ABCD$. Найдите какие-нибудь семь попарно неравных векторов с концами и началами в точках A, B, C, D, O, сумма которых равна нулевому вектору. Объясните свой ответ.

Задача 2. (*«Курчатов», 2018, 9*) В остроугольном треугольнике ABC через вершину A проведена прямая ℓ, перпендикулярная медиане, выходящей из вершины A. Продолжения высот BD и CE треугольника пересекают прямую ℓ в точках M и N. Докажите, что $AM = AN$.

Задача 3. (*ОММО, 2017*) Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC.

Вне; $\sqrt{3}$

Задача 4. (*ОММО, 2016, 11*) В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

224

Задача 5. (*ОММО, 2015, 9–11*) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

2015

Задача 6. (*ОММО, 2014*) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K — середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7$.

$\frac{7}{4}$

Задача 7. (*«Ломоносов», 2016, 10–11*) В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.

$\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Задача 8. (*ММО, 2013, 11.3*) Дан такой выпуклый четырёхугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

Задача 9. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10.4*) На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2. Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, а на стороне AC — точки B_1 и B_2. Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен 60°. Докажите, что

$$\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{CA} = \frac{C_1C_2}{AB}\,.$$

Задача 10. (*«Высшая проба», 2017, 11.2*) На окружности с центром O расположим шестёрку точек $P_1, \ldots, P_6$. Назовём шестёрку *интересной*, если $\overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_6} = 0$ и все углы $\angle P_iOP_j$ целые в градусах. Назовём шестёрку *скучной*, если она переводится в себя отражением от точки O или поворотом вокруг O на 120°. Существуют ли интересные нескучные шестёрки точек на окружности?

Задача 11. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Дан правильный 12-угольник $A_1A_2\ldots A_{12}$. Можно ли из 12 векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\ldots$, $\overrightarrow{A_{11}A_{12}}$, $\overrightarrow{A_{12}A_1}$ выбрать семь, сумма которых равна нулевому вектору?

Задача 12. (*ММО, 2018, 8.6; 11.5*) На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — правильный. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также правильный.