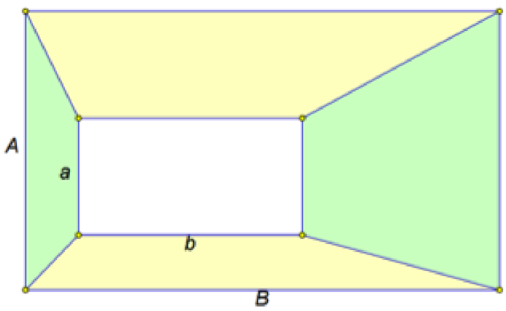
Планиметрия на олимпиаде «Покори Воробьёвы горы!»

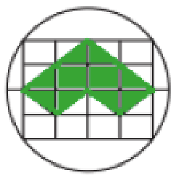
1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8*) Внутри большого прямоугольника размером $A \times B$ расположен маленький прямоугольник размером $a \times b$ (см. рисунок).



Найдите разность между суммарной площадью жёлтых и суммарной площадью зелёных четырёхугольников.

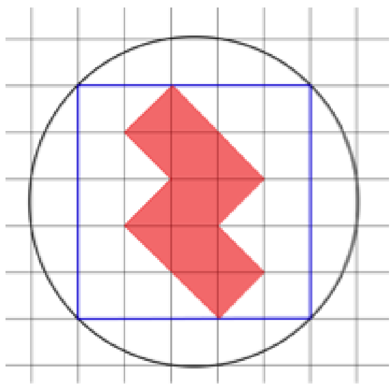
$Ab - Ba$

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–8*) Найдите периметр зеленой фигуры (см. рис.), если известно, что диаметр круга равен 12, а все прямоугольники, образующие сетку — одинаковые.



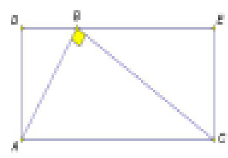
24

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–8*) На клетчатой бумаге нарисовали квадрат и описали около него окружность радиуса 10. Найдите периметр красного многоугольника.



40

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.3, 9.2*) Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 5$ и $BC = 6$ описали прямоугольник $ADEC$, как показано на рисунке. Какова площадь $ADEC$?



30

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.5, 9.4*) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD \parallel BC$ диагонали пересекаются в точке E. Известны площади $S(\triangle ADE) = 12$ и $S(\triangle BCE) = 3$. Найдите площадь трапеции.

$\boxed{27}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.7, 9.6*) В трапеции известны длины диагоналей — 6 и 8, а также длина средней линии — 5. Найдите высоту трапеции.

$\boxed{4{,}8}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8.6, 9.2*) В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Из вершины B опущен перпендикуляр BH на сторону AD. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BH = h$.

$\boxed{h^2}$

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8.8*) В трапеции диагонали пересекаются под прямым углом и одна из них равна средней линии. Определите, какой угол образует эта диагональ с основаниями трапеции.

$\boxed{60^\circ}$

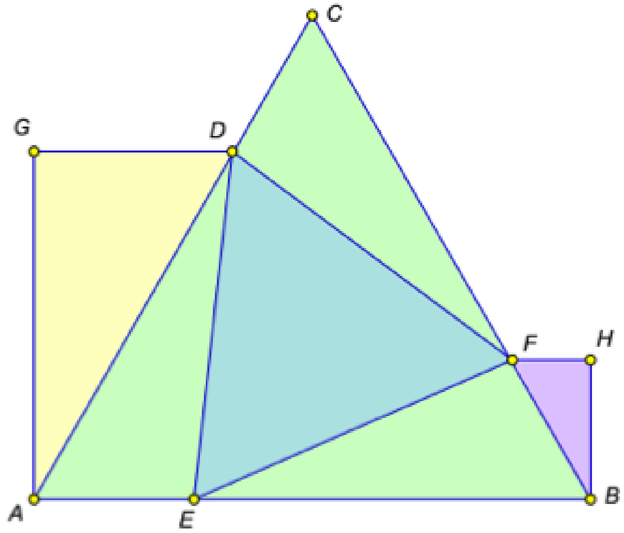
9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8.2, 9.2*) В треугольнике ABC известны стороны $AB = 5$ и $AC = 6$. Какой должна быть сторона BC, чтобы угол ACB был максимально возможным?

$\boxed{\sqrt{11}}$

10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8.6, 9.5*) Петя хотел нарисовать правильный треугольник ABC. Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59^\circ$ и $\angle B = 63^\circ$. Потом Петя провёл высоты CE и BD, но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92^\circ$. Найдите градусную меру угла AED.

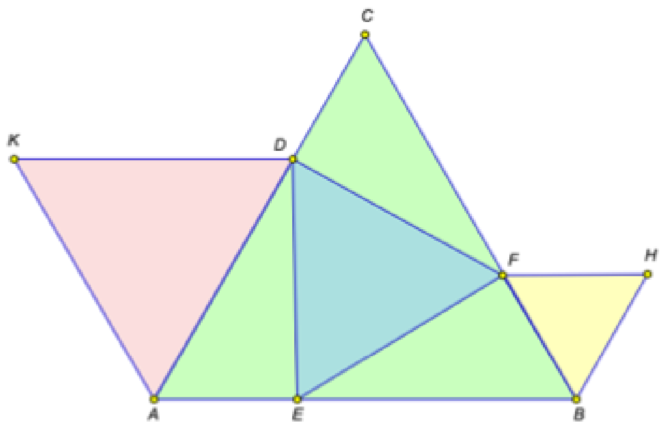
$\boxed{58^\circ}$

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 9.7*) В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник DEF (см. рис.). Треугольники AGD и BFH — прямоугольные, катеты GD и FH параллельны прямой AB. Площадь треугольника AGD равна 9, а треугольника BFH — 1. Найдите площадь треугольника DEF.



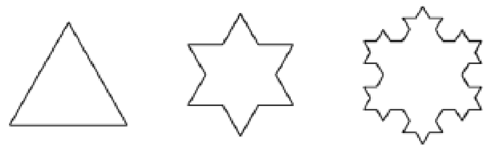
14

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 9.7*) В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник DEF (см. рис.). Треугольники AGD и BFH — тоже равносторонние, стороны KD и FH параллельны прямой AB. Площадь треугольника AKD равна 9, а треугольника BFH — 1. Найдите площадь треугольника DEF.



7

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 9.6*) Назовём «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником.



а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть M_0 — равносторонний треугольник, M_1 — многоугольник, полученный путём зазубривания M_0, M_2 получен зазубриванием M_1 (см. рисунок), …, M_{2018} получен зазубриванием M_{2017}.

Найдите $S(M_{2018})$, если известно, что $S(M_0) = 3$. В ответе укажите значение $S(M_{2018})$, округлённое до сотых.

4,8

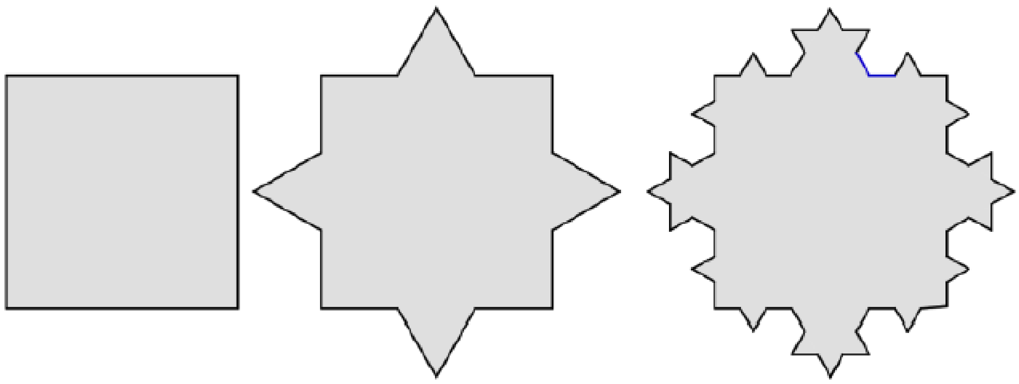
14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 9.6*) Назовём «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником.

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть K_0 — квадрат со стороной 2, K_1 — многоугольник, полученный путём зазубривания K_0, K_2 получен зазубриванием K_1 (см. рисунок), …, K_{2018} получен зазубриванием K_{2017}.



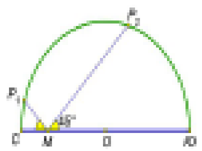
Найдите площадь $S(K_{2018})$. Ответ округлите до сотых по стандартным математическим правилам.

6,4

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9.5*) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известен угол BCD, равный $120°$. В этот угол вписана окружность радиуса 1, проходящая через точки A, B и D. Найдите площадь треугольника ABD.

$\frac{\sqrt{3}}{4}$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9.7*) Марк Уотни испытывает на прочность новый купол, предназначенный для экспедиции на Марс. Купол выполнен в форме полусферы радиуса 20 м. Марк поворачивается на север и стреляет под углом 45° к земле, потом поворачивается на юг и тоже стреляет под углом 45° (см. рис). Какие значения может принимать $|P_1P_2|$ — расстояние между точками попадания?



$\boxed{20\sqrt{2}}$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9.7*) На диаметре AB выбрана точка M. Точки C и D, лежащие на окружности по одну сторону от AB, выбраны так, что $\angle AMC = \angle BMD = 30°$. Найдите диаметр окружности, если известно, что $CD = 12$.

$\boxed{8\sqrt{3}}$

18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.6*) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = 30$ и $AC = 40$. На сторонах AB, BC и CA выбраны точки C_1, A_1, B_1 соответственно так, что $AC_1 = BA_1 = CB_1 = 1$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

$\boxed{554{,}2}$

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.6*) В трапеции $KLMN$ известны основания $KN = 25$, $LM = 15$ и боковые стороны $KL = 6$, $MN = 8$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

$\boxed{5}$

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.6*) Окружность с диаметром AB пересекает отрезки AC и BC в точках M и N соответственно, причём длина отрезка MN равна радиусу окружности. Найдите площадь четырехугольника $ABNM$, если известно, что $AC = 12$ и $BC = 8$.

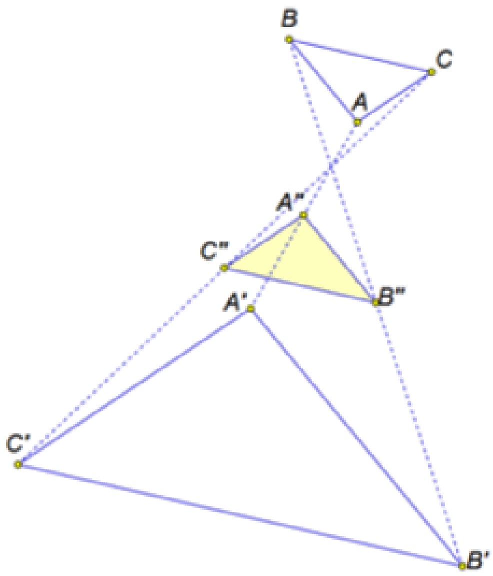
$\boxed{18\sqrt{3}}$

21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9.6*) В треугольник ABC вписана окружность с центром O, к которой проведена касательная, пересекающая стороны AC и AB в точках M и N соответственно. Найдите угол A треугольника ABC, если $\angle MON = 26°$.

$\boxed{128°}$

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9.9*) Даны треугольники ABC и $A'B'C'$, площади которых равны 1 и 2025 соответственно. Известно, что лучи AB и $A'B'$ параллельны и идут в противоположных направлениях (см. рисунок). То же верно и для пар BC и $B'C'$, CA и $C'A'$. Точки A'', B'' и C'' — середины отрезков AA', BB' и CC'. Найдите площадь треугольника $A''B''C''$.

$\boxed{484}$



23. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 7.3*) Дан угол с вершиной O_1. Провели окружность с центром в точке O_1, она пересекает стороны угла в точках A и B. Потом провели касательные к окружности в точках A и B, они пересеклись в точке O_2. Построили вторую окружность, с центром O_2 и радиусом O_2A, и провели касательные в точках A и B. Эти касательные пересекаются в точке O_3. Затем построили окружность с центром O_3, и так далее. Так проделали 1001 раз. Найдите угол $AO_{1001}B$, если $\angle AO_1B = 60°$.

$\boxed{60°}$

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8.1*) Дан треугольник ABC, точка Q — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и ABQ, если радиус первой (описанной около ΔABC) равен R.

$\boxed{R}$

25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9.3*) Вокруг равнобедренного треугольника ABC с основанием $BC = a$ и высотой $AH = h$ описана окружность ω_1. В угол BAC вписана окружность ω_2, касающаяся окружности ω_1 изнутри и касающаяся сторон угла в точках P и Q. Определите, в каком отношении отрезок PQ делит высоту AH.

$\boxed{a : \sqrt{a^2 + 4h^2}}$

26. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9.6*) Треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_{2012}B_{2012}C_{2012}$ таковы, что вершинами треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ являются точки касания сторон треугольника $A_nB_nC_n$ и вписанной в этот треугольник окружности ($n = 1, 2, \ldots, 2011$). Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если известно, что наибольший угол этого треугольника равен одному из углов треугольника $A_{2012}B_{2012}C_{2012}$.

27. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.4*) В равнобедренном треугольнике ABC на высоте BH, равной основанию AC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая боковую сторону BC в точке F. Каково отношение площади треугольника FCH к площади треугольника ABC? Какая часть площади треугольника ABC находится внутри окружности?

$\boxed{\frac{1}{10};\ \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\right)}$

28. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.4*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD = \angle CDB$ и $\angle BAD = \angle CDA = 60°$.

1. Можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность?
2. Найдите минимум отношения стороны BC к стороне AD.

$\boxed{\text{1) нет; 2) } \frac{1}{2}}$

29. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.4*) В треугольнике ABC, $\angle A = 2\alpha$, биссектрисы BD и CE пересекаются в точке I. Найдите наименьший возможный радиус окружности, описанной около треугольника DEI, если сумма длин отрезков DI и EI равна $2d$.

$\boxed{R = \frac{d\sqrt{2(1-\cos(\pi/2+\alpha))}}{2\sin(\pi/2+\alpha)}}$

30. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.4*) Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = 3$, $AD = 4$, $AC = 6$, а площадь треугольника ABC равна площади треугольника ADC и в два раза больше площади треугольника ABD.

$\boxed{8\sqrt{5}}$

31. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.3*) Найдите площадь треугольника ABC, в котором $AB = 4$, $AC = 5$ и $\cos(\angle B - \angle C) = \frac{11}{16}$.

$\boxed{\frac{5\sqrt{15}}{4}}$

32. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.4*) В окружности радиуса $5\sqrt{2}$ проведены взаимно перпендикулярные хорды, которые точкой пересечения делятся в отношении $6 : 1$ и $2 : 3$. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

$\boxed{\sqrt{26}}$

33. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2018, 10–11.4*) В треугольник ABC, в котором сумма сторон AB и BC в 9/5 раз больше стороны AB, вписана окружность, касающаяся сторон BC, AC и AB в точках M, N и K соответственно. Отношение площади треугольника MNC к площади треугольника ABC равно r. Найдите при данных условиях:

а) наименьшее значение r;

б) все возможные значения r.

а) $\frac{81}{16}$; б) $\left[\frac{81}{16}; \frac{7}{2}\right)$

34. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2018, 10–11.4*) Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $\angle ABD = \angle CBD = 40°$, $\angle ACD = 20°$, $\angle CAD = 30°$. Найдите:

а) углы BAD и BCD;

б) расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, если $BC = 3$.

а) $\angle BAD = 30°$, $\angle BCD = 20°$; б) $\sqrt{3}$

35. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2018, 10–11.4*) Прямая, проходящая через точки, симметричные основанию высоты AD остроугольного треугольника ABC относительно сторон AC и AB, пересекает эти стороны в точках E и F соответственно. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения отрезков BE и CF, если $AC = b$ и $\angle ABC = \beta$.

$x = b \operatorname{ctg} \beta$

36. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11.2*) Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BL. Найдите площадь треугольника ABM, если площадь треугольника ABL равна 10.

15

37. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11.4*) Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника, в точке E. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $AE = d$.

$\left(d^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

38. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11.3*) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK. Периметр треугольника ABC равен 13, а периметр треугольника BCK равен 5. Найдите периметр треугольника ACK.

12

39. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11.4*) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и $\angle ABC = \frac{\pi}{9}$ на стороне AB выбрана точка D так, что $BD = AC$. Найдите величину угла DCB (в радианах) и сравните её с 0,18.

$\frac{\pi}{18} < 0{,}18$

40. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.3*) Серединами оснований BC и AD трапеции $ABCD$ являются точки K и L соответственно. Известно, что $AD = 10 \cdot BC$. На боковых сторонах AB и CD взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN параллельна основаниям трапеции. При каком значении отношения $AM : MB$ сумма площадей треугольников BKN и MNL будет наибольшей?

$\boxed{19 : 17}$

41. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.3*) В окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке M, причём $AM = 4$, $AB = 6$. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD, если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O.

$\boxed{4\sqrt{5}}$

42. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.3*) На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM : MB = 3 : 1$, $CN : NB = 1 : 7$. Какой процент от площади четырёхугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN?

$\boxed{28\%}$

43. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.2*) Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внешним образом в точках A и B (то есть точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB). Известно, что $\angle AO_1B = \alpha$, $\angle AO_2B = \beta$ и $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

$\boxed{R_1 = \frac{a \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}},\ R_2 = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}}$

44. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.4*) Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D, причём AD в три раза меньше AC. Косинус угла A равен $\sqrt{3}/4$.

а) Найдите отношение $BC : BD$.

б) Найдите отношение радиуса окружности к BD.

$\boxed{\text{а) } \sqrt{3};\ \text{б) } \sqrt{\frac{10}{13}}}$

45. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.3*) В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

$\boxed{2\sqrt{30}}$

46. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.4*) Города A, B, C, D, E лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Два велосипедиста выехали одновременно из A в D и из C в E, повстречавшись в пути. Затем они выехали одновременно из D в B и из E в C, опять повстречавшись в пути. Наконец, они выехали одновременно из B в E и из C в B, прибыв в пункты назначения одновременно. Найдите BC, если $AE = 2$ км и $CD = 4$ км, а скорость каждого велосипедиста постоянна.

$\boxed{\text{16 км}}$

47. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.2*) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC.

$\boxed{\arccos \frac{5}{3\sqrt{3}}}$

48. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3*) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$, $BO = 2 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A, к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

$\boxed{9/2}$

49. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.2*) Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Биссектрисы внутренних углов треугольника при вершинах A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. Угол между биссектрисами равен $60°$. Длина стороны AB равна 3. Найдите площадь треугольника A_1B_1O.

$\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$

50. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3*) В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром O, при этом $\angle AOB = 75°$, $AB = 3$. Найдите площадь круга, ограниченного описанной вокруг треугольника ABE окружностью, где E — точка пересечения прямых AD и BC.

$\boxed{9\pi}$

51. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3*) Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $2/\sqrt{5}$. Через середины одного катета и гипотенузы провели окружность, касающуюся другого катета. Найдите отношение части гипотенузы, лежащей внутри получившегося круга, ко всей гипотенузе.

$\boxed{2/5 \text{ или } 11/40}$

52. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3*) Окружность радиуса 1 проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{3}$, $MK = 1$, а центр окружности находится внутри треугольника ABC на расстоянии 5 от точки C.

$\boxed{6\sqrt{3}}$

53. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. На стороне AC как на диаметре построена окружность. Из вершины B проведена касательная к окружности, отличная от BC, и D — точка касания. Точка H является основанием перпендикуляра, проведённого из точки D на сторону AC. Найдите отношение $DH : EH$, где E — точка пересечения DH и AB.

$\boxed{2}$

54. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.5*) Последовательность выпуклых четырёхугольников

$$P_1Q_1R_1S_1, \quad P_2Q_2R_2S_2, \quad \ldots, \quad P_{2012}Q_{2012}R_{2012}S_{2012}$$

такова, что вершины четырёхугольника $P_{n+1}Q_{n+1}R_{n+1}S_{n+1}$ являются серединами сторон четырёхугольника $P_nQ_nR_nS_n$ ($n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2011$).

а) Может ли отношение периметров четырёхугольников $P_{2012}Q_{2012}R_{2012}S_{2012}$ и $P_1Q_1R_1S_1$ равняться $32 \cdot 10^{-303}$?

б) Найдите все возможные значения этого отношения.

а) Нет; б) $(2^{-1006}; 2^{-1005})$