Планиметрия на ОММО

Задачи по планиметрии на ОММО, как правило, не требуют особых вычислений. Однако почти в каждой задаче есть «изюминка» — изящная и не всегда простая идея. Если уловить эту идею, то дальнейшее решение труда не представляет.

1. (*ОММО, 2020.4*) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке E. Через точку E проведена касательная к окружности, которая пересекает катет CB в точке D. Найдите длину DB, если $AE = 6$, а $BE = 2$.

$\boxed{2}$

2. (*ОММО, 2019*) Точка O лежит внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Расстояние от неё до вершины A прямого угла равно 6, до вершины B равно 4, до вершины C равно 8. Найти площадь треугольника ABC.

$\boxed{20 + 6\sqrt{7}}$

3. (*ОММО, 2019*) Дан треугольник ABC. На отрезках AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = BY$. Оказалось, что точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC (L на отрезке AC). Докажите, что $XL \parallel BC$.

4. (*ОММО, 2018*) В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K. Найдите площадь трапеции, если $AK = 16$, $DK = 4$ и $CD = 6$.

$\boxed{432}$

5. (*ОММО, 2018*) Точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC, а один из углов треугольника ABC равен $40°$. Найдите два других угла треугольника ABC.

$\boxed{60° \text{ и } 80°}$

6. (*ОММО, 2017*) Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC.

$\boxed{\text{Вне; } \sqrt{3}}$

7. (*ОММО, 2017*) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен $45°$. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

$\boxed{10\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \text{ см}}$

8. (*ОММО, 2016, 9–10*) Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такова, что $AC = BC + AD$, а один из углов между прямыми AC и BD равен $60°$. Докажите, что $ABCD$ — равнобокая трапеция.

9. (*ОММО, 2016, 11*) Пусть OP — диаметр окружности Ω, ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω. Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D. Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружность в точке A. Найдите длину отрезка AB, если $BD \cdot BC = 5$.

$\boxed{\sqrt{5}}$

10. (*ОММО, 2016, 9–10*) На сторонах AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки F и E соответственно таким образом, что $AF/FD = BE/EC = AB/CD$. Продолжение отрезка EF за точку F пересекает прямую AB в точке P, а прямую CD — в точке Q. Докажите, что $\angle BPE = \angle CQE$.

11. (*ОММО, 2016, 11*) В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

$\boxed{224}$

12. (*ОММО, 2015, 9–11*) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 65 и 31 соответственно, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$\boxed{2015}$

13. (*ОММО, 2015, 9–11*) Прямая c задается уравнением $y = 2x$. Точки A и B имеют координаты $A(2, 2)$ и $B(6, 2)$. На прямой c найдите точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

$\boxed{(2, 4)}$

14. (*ОММО, 2014*) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K — середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7$.

$\boxed{\frac{7}{4}}$

15. (*ОММО, 2014*) Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол 30°. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

$\boxed{\sqrt{3}}$

16. (*ОММО, 2013*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC, равна 2013. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB.

$\boxed{2013}$

17. (*ОММО, 2013*) На плоскости задана точка P. Рассматриваются различные равносторонние треугольники ABC, такие что $PA = 2$, $PB = 3$. Какое максимальное значение может принимать длина отрезка PC?

$\boxed{5}$

18. (*ОММО, 2012*) Длина медианы AD треугольника ABC равна 3, длины сторон AB и AC — 5 и 7 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.

$\boxed{6\sqrt{6}}$

19. (*ОММО, 2012*) На одной из сторон острого угла с вершиной O взяты точки A и B, а на другой — точка C. При какой длине отрезка OC величина угла ACB максимальна, если $OA = 1$, $OB = 5$?

$\boxed{\sqrt{5}}$

20. (*ОММО, 2011*) Три правильных пятиугольника имеют общий центр, их стороны соответственно параллельны. Стороны двух пятиугольников равны 4 см и 12 см. Третий пятиугольник делит площадь фигуры, заключённой между первыми двумя, в отношении $1 : 3$, считая от меньшего пятиугольника. Найдите сторону третьего пятиугольника.

$\boxed{4\sqrt{3}}$

21. (*ОММО, 2011*) В равнобедренном треугольнике с периметром 60 см точка пересечения медиан лежит на вписанной окружности. Найдите стороны треугольника.

$\boxed{25,\ 25,\ 10}$

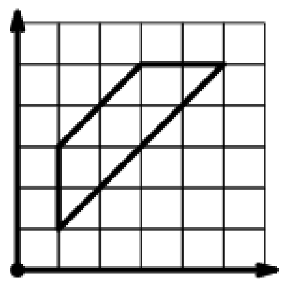
22. (*ОММО, 2010*) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Найдите радиус окружности, если $AC = 6$, $\angle AEC = 5\angle BAF$, $\angle ABC = 72°$.

$\boxed{3}$

23. (*ОММО, 2010*) Вершины K, L, M, N четырёхугольника $KLMN$ лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Найти наименьший возможный периметр четырёхугольника $KLMN$, если известно, что $AK = 2$ см, $BK = 4$ см и $AN = ND$.

$\boxed{\sqrt{13} + \sqrt{81}\ \text{см}}$

24. (*ОММО, 2009*) Найдите координаты центра и радиус окружности, описанной около четырёхугольника на рисунке, если сторона клетки равна 1.



$\boxed{(4, 2);\ \sqrt{10}}$

25. (*ОММО, 2009*) Дана трапеция с основаниями 1 и 4 и площадью S. Найдите площадь треугольника, образованного диагоналями и меньшим основанием трапеции.

$\boxed{S/25}$

26. (*ОММО, 2009*) Радиус вписанной в треугольник окружности равен 1, а длины высот выражаются натуральными числами. Найдите стороны треугольника.

$\boxed{2\sqrt{3}}$