Планиметрия на олимпиаде «Ломоносов»

1. (*«Ломоносов», 2019, 7–8.3*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса BD и высота CH. Из вершины C на биссектрису BD опущен перпендикуляр CK. Найдите угол HCK, если $BK : KD = 3 : 1$.

$\boxed{30^\circ}$

2. (*«Ломоносов», 2016, 7–8.3, 9.1*) В прямоугольнике $ABDF$ на сторонах $BD = 2$ и $DF = 3$ выбрали точки C и E соответственно, так, что треугольник AFE равен треугольнику EDC. Потом от прямоугольника $ABDF$ отрезали треугольники ABC, CDE и AFE. Найдите углы оставшегося треугольника.

$\boxed{90^\circ, 45^\circ, 45^\circ}$

3. (*«Ломоносов», 2015, 8.2*) В равностороннем треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2 так, что $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. На стороне AC выбрана точка B_1 так, что $AB_1 : B_1C = 1 : 2$. Найдите сумму углов AA_1B_1 и AA_2B_1.

$\boxed{30^\circ}$

4. (*«Ломоносов», 2012, 8.5*) На сторонах AB, BC, CD и DA равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD отметили точки K, L, M и N соответственно. Оказалось, что $KLMN$ — параллелограмм. Докажите, что $KP = MQ$, где P и Q — середины сторон AB и CD соответственно.

5. (*«Ломоносов», 2011, 8.5*) Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена медиана CM. Окружность, вписанная в треугольник ACM, касается стороны CM в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

$\boxed{30^\circ, 60^\circ, 90^\circ}$

6. (*«Ломоносов», 2014, 8.4, 9.2*) Хорда AC образует угол 32° с диаметром AD. Из центра окружности O опущен перпендикуляр OH на хорду AC, его продолжение пересекает окружность в точке B. Найдите угол между прямыми BC и AD.

$\boxed{3^\circ}$

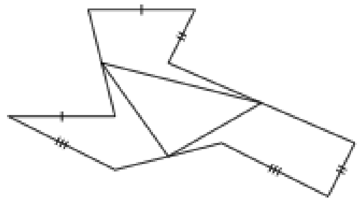
7. (*«Ломоносов», 2015, 8.4, 9.3*) В треугольнике ABC, основание AB которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты AM, BN и CK. Найдите длину основания AB, если известны координаты точек $M(2, 2)$ и $N(4, 4)$.

$\boxed{4\sqrt{5}}$

8. (*«Ломоносов», 2013, 8.6, 9.1*) Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1 и D_1 такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. Найдите площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $S(ABCD) = 1$.

$\boxed{5}$

9. (*«Ломоносов», 2019, 9.6*) Лёшин дачный участок имеет форму девятиугольника, у которого есть три пары равных и параллельных сторон (см. рисунок). Лёша знает, что площадь треугольника с вершинами в серединах оставшихся сторон девятиугольника равна 12 соток. Помогите ему найти площадь всего дачного участка.



48 соток

10. (*«Ломоносов», 2019, 9.8*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки P и Q — середины биссектрис, проведённых из вершин A и B. Вписанная в треугольник окружность касается гипотенузы в точке H. Найдите угол PHQ.

$90°$

11. (*«Ломоносов», 2018, 9.2*) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведённая из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, у которых радиусы вписанных окружностей равны 3 и 4.

150

12. (*«Ломоносов», 2018, 9.8*) Моль проела в ковре дырку в форме прямоугольника со сторонами 10 см и 4 см. Найдите наименьший размер квадратной заплатки, которой можно закрыть эту дырку (заплатка закрывает дырку, если все точки прямоугольника лежат внутри квадрата или на его границе).

Сторона равна $7\sqrt{2}$ см

13. (*«Ломоносов», 2017, 9.6*) Из отрезков длин 3, 5, 7 и 9 составлен четырёхугольник, в который вписана окружность. К ней проведены две касательные: одна пересекает одну пару соседних сторон четырёхугольника, а другая — пару оставшихся. Найдите разность периметров треугольников, отсечённых от четырёхугольника этими касательными.

4 или 8

14. (*«Ломоносов», 2012, 9.4*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите величину угла ACB, если известно, что $\angle ACD = 72°$ и $AB = BD$.

$54°$

15. (*«Ломоносов», 2015, 9.5*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ площади треугольников ABD и BCD равны, а площадь ACD равна половине площади ABD. Найдите длину отрезка CM, где M — середина стороны AB, если известно, что $AD = 12$.

18

16. (*«Ломоносов», 2013, 9.6*) Две окружности радиусов R и R' касаются друг друга внешним образом в точке P и касаются прямой l в точках A и B соответственно. Пусть Q — точка пересечения прямой BP с первой окружностью. Определить, на каком расстоянии от прямой l расположена точка Q.

$2R$

17. (*«Ломоносов», 2011, 9.8*) В равнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису BP. Докажите, что если угол BAC равен $100°$, то $AP + PB = BC$.

18. (*«Ломоносов», 2019, 10–11.4*) На стороне AC треугольника ABC взяты точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K и $AE : EK : KC = 3 : 5 : 4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC.

$\boxed{\frac{1}{5}}$

19. (*«Ломоносов», 2019, 10–11.4*) В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D, что $BD : DC = 1 : 5$, а на стороне AC — точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K. Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK в точках M и N соответственно, причём $BM : ME = 3 : 4$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $AM : ND$.

$\boxed{120 : 49}$

20. (*«Ломоносов», 2019, 10–11.4*) В треугольнике ABC на стороне AC отмечены такие точки E и K, что $AE = EK = KC$. На стороне BC взята такая точка D, что отрезок AD пересекает отрезки BE и BK в точках N и M соответственно, причём $AN : NM = 4 : 3$. Найдите отношение площади четырёхугольника $CKMD$ к площади треугольника ABC.

$\boxed{\frac{1}{6}}$

21. (*«Ломоносов», 2019, 10–11.4*) В треугольнике ABC на стороне BC отмечена такая точка D, что $BD : DC = 1 : 3$, а на стороне AC — точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K. Отрезок AD пересекается с отрезками BE и BK соответственно, причём $BM : ME = 7 : 5$, $BN : NK = 2 : 3$. Найдите отношение $MN : AD$.

$\boxed{11 : 45}$

22. (*«Ломоносов», 2018, 10–11.3*) В треугольнике ABC, площадь которого равна 20, проведена медиана CD. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $AC = \sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник ACD, лежит на окружности, описанной около треугольника BCD.

$\boxed{\frac{41}{10} \text{ или } \frac{41}{8}}$

23. (*«Ломоносов», 2017, 10–11.4*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются на прямой BD. Найдите сторону AD, если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

$\boxed{\frac{5}{2}}$

24. (*«Ломоносов», 2016, 10–11.4*) В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.

$\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$

25. (*«Ломоносов», 2015, 10–11.3*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки B проведён перпендикуляр на сторону AD, пересекающий AC в точке O. Найдите AO, если $AB = 4$, $OC = 6$.

$\boxed{2}$

26. (*«Ломоносов», 2014, 10–11.3*) Прямоугольник, отношение сторон которого равно 5, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

$\boxed{2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}}$

27. (*«Ломоносов», 2013, 10–11.4*) В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 1$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 1 : 2$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 5$, $BC = 2$, $KM = 7/3$, а $\cos\angle CAD = 1/3$.

$\boxed{\frac{20\sqrt{2}}{27}}$

28. (*«Ломоносов», 2012, 10–11.5*) Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол B, если $OD = 4AC$.

$\boxed{2\arccos\frac{1}{8} = \arccos\left(-\frac{31}{32}\right)}$

29. (*«Ломоносов», 2011, 10–11.5*) Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L, делящей хорду в отношении $AL : BL = 2 : 3$. Найдите AK, если $BK = 12$.

$\boxed{8}$

30. (*«Ломоносов», 2010.2*) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC точки D и F так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF : EF = 2 : 3$?

$\boxed{\frac{6}{25}}$

31. (*«Ломоносов», 2010.10*) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD — в точках A и D соответственно. Найдите $AK^2 + DL^2$.

$\boxed{12}$

32. (*«Ломоносов», 2009.7*) Две окружности касаются внешним образом: друг друга в точке A, а третьей окружности — в точках B и C. Продолжение хорды AB первой окружности пересекает вторую окружность в точке D, продолжение хорды AC пересекает первую окружность в точке E, а продолжения хорд BE и CD — третью окружность в точках F и G соответственно. Найдите BG, если $BC = 5$ и $BF = 12$.

$\boxed{13}$

33. (*«Ломоносов», 2008.5*) Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

$\boxed{3 \text{ или } 2\sqrt{3}}$

34. (*«Ломоносов», 2007.5*) На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

$\boxed{10}$

35. (*«Ломоносов», 2006.4*) Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, при этом $BD = 9$ и $BE = 12$. Найдите радиусы окружностей.

8 и 36

36. (*«Ломоносов», 2005.3*) Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

25

37. (*«Ломоносов», 2005.5*) На окружности взята точка A, на её диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найдите BC, если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

11