Плоские множества

Плоскими множествами мы для краткости называем множества точек координатной плоскости. Во всех задачах плоские множества задаются уравнениями или неравенствами. Для решения таких задач нам понадобятся следующие простые факты.

- Прямая $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. При этом неравенство $y \geqslant ax + b$ задаёт верхнюю полуплоскость, а неравенство $y \leqslant ax + b$ — нижнюю полуплоскость. В обоих случаях прямая включена в полуплоскость, поскольку неравенство нестрогое.

- Парабола $y = ax^2 + bx + c$ разбивает координатную плоскость на две области. При этом неравенство $y \geqslant ax^2 + bx + c$ задаёт верхнюю область (лежащую над параболой), а неравенство $y \leqslant ax^2 + bx + c$ — нижнюю область (лежащую под параболой). В обоих случаях парабола входит в область, поскольку неравенство нестрогое.

- Вообще, пусть γ есть график функции $y = f(x)$. Тогда неравенство $y \geqslant f(x)$ задаёт множество точек, лежащих выше γ, а неравенство $y \leqslant f(x)$ — множество точек, лежащих ниже γ. В обоих случаях граница γ входит в множество, поскольку неравенство нестрогое.

- Уравнение окружности ω радиуса R с центром в точке (a, b) имеет вид
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

- Неравенство $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant R^2$ задаёт *круг* радиуса R с центром в точке (a, b), то есть внутренность окружности ω. Неравенство $(x-a)^2 + (y-b)^2 \geqslant R^2$ задаёт внешность окружности ω (то есть плоскость с круглой дыркой). В обоих случаях окружность ω включена в область, поскольку неравенство нестрогое.

1. (*«Шаг в будущее», 2022, 8.4*) Известно, что окружность с центром $E\left(0; \frac{1}{3}\right)$ проходит через точку $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1+\sqrt{8}}{3}\right)$. Какую площадь имеет фигура, ограниченная этой окружностью и графиками функций $y = 3 - |x|$ и $5y - x = -9$?

$\boxed{24 - \pi}$

2. (*МГУ, ВМК, 2002.1*) Найти площадь фигуры, заданной системой
$$\begin{cases} 3y - x \leqslant 6, \\ \sqrt{3x} \leqslant 6 - x, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

$\boxed{\frac{15}{2}}$

3. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 9*) Постройте график уравнения

$$x^2 - y^4 = \sqrt{18x - x^2 - 81}\,,$$

то есть изобразите на координатной плоскости *все* точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению.

$\boxed{\text{Пара точек}}$

4. (*«Физтех», 2016, 9*) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| - y)^2 \leqslant 16, \\ y - 3x \leqslant 0, \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

$\boxed{\frac{20}{3} + \pi}$

5. (*«Физтех», 2019, 9*) На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y| + |4 + y| \leqslant 4, \\ \dfrac{x - y^2 - 4y - 3}{2y - x + 3} \geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

$\boxed{8}$

6. (*«Физтех», 2019, 9*) На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \geqslant |x + y|, \\ \dfrac{x^2 - 6x + y^2 - 8y}{3y - x + 6} \geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

$\boxed{3}$

7. (*«Физтех», 2019, 10*) На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x - 1| + |5 - x| \leqslant 4, \\ \dfrac{x^2 - 6x + 2y + 7}{y + x - 4} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

$\boxed{4}$

8. (*«Физтех», 2019, 10*) На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y-x\geqslant |x+y|, \\ \dfrac{x^2+8x+y^2+6y}{2y-x-8}\leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

$\boxed{8}$

9. (*МГУ, ДВИ, 2012.5*) Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x,y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$|x|+|x+3y|+3|y-2|=6.$$

$\boxed{6}$

10. (*«Физтех», 2016, 9–10*) Изобразите на плоскости (x,y) множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|5x|+|12y|+|60-5x-12y|=60,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

$\boxed{30}$

11. (*«Физтех», 2016, 10*) Изобразите на плоскости (x,y) множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\left|16+6x-x^2-y^2\right|+|6x|=16+12x-x^2-y^2,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

$\boxed{12+25\pi-25\arcsin\frac{4}{5}}$

12. (*«Ломоносов», 2011, 10–11*) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x}+2x\geqslant 0, \\ -1-x^2\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{x}. \end{cases}$$

$\boxed{4}$

13. (*МГУ, мехмат, 2003-03.4*) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y+\log_2 x|+\left|y+1-2^{x-1}\right|=\left|2y-2^{x-1}+1+\log_2 x\right|, \\ |x|+|y+1|+|y-1|=x+2. \end{cases}$$

$\boxed{2}$

14. (*«Физтех», 2017, 10*) а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Ф, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leqslant 2(x - y), \\ x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y - 1). \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры Ф и расстояние от точки $T(0, 4)$ до ближайшей точки фигуры Ф.

$\boxed{\text{б) } 2\pi;\ 2\sqrt{2} - 2}$

15. (*«Физтех», 2017, 10*) Изобразите на плоскости фигуру Ф, состоящую из точек (x, y) координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leqslant 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура Ф.

16. (*«Высшая проба», 2014, 10–11*) На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке $(11, 1)$ пересекает это множество в точках A, B, C и D. Докажите, что все точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т. е. на кривой, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}}$

17. (*«Высшая проба», 2017, 10*) Парабола $x = y^2$ пересекается с некоторой окружностью в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на некоторой параболе, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, или на паре параллельных прямых.

18. (*ОММО, 2009*) Пусть x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leqslant 5, \\ y + 4x \leqslant -5, \\ 3y + 2x \geqslant -5. \end{cases}$$

Найдите все значения, которые может принимать функция $x^2 + y^2$.

$\boxed{[\frac{25}{17}; 17]}$

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11*) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\big||x| - 6\big| + \big||y| - 7\big| \leqslant 10.$$

$\boxed{700}$

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все значения y, при каждом из которых ни одно значение x, удовлетворяющее неравенству

$$\log_2(|x|+|y|) \leqslant 2,$$

не удовлетворяет неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}}(|x|+|y+4|) \geqslant -2.$$

$\boxed{(-\infty;-4]\cup[0;+\infty)}$

21. (*ОММО, 2011*) Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты которых (x,y) удовлетворяют неравенству

$$\big(|x|+\big|4-|y|\big|-4\big)^2 \leqslant 4.$$

Нарисуйте фигуру W и найдите её площадь.

$\boxed{120}$

22. (*«Ломоносов», 2007*) Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0,0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2+xy+y^2+14x+2y+4<0.$$

$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{7}{3}-\frac{\pi}{4}}$

23. (*«Высшая проба», 2012, 10*) Сколько точек, обе координаты которых натуральны, лежит строго внутри области, ограниченной графиком функции $y=-x^3+30x^2-300{,}6x+2012$ и осями координат?

$\boxed{19103}$

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Гипербола $y=5/x$ пересекается с прямой $2x+y=$ $=12$ в точках A и B, а с прямой $x+2y=8$ — в точках C и D. Найдите координаты точки, равноудалённой от точек A, B и C.

$\boxed{(7,8)}$

25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11*) Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(|x|-5)^2+(y-4)^2=\left(2-\frac{|x|}{x}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $\left(10-4\sqrt{6};6\right)$.

$\boxed{y=-\frac{x-10}{2\sqrt{6}}+4}$

26. (*МФТИ, 2003*) Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4|x|, \\ |x|+|y| \geqslant 2, \\ x^2-y^2+16-8x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:
а) первому неравенству системы;
б) первым двум неравенствам системы;
в) всем трем неравенствам системы.

а) 8π, б) 6π, в) $4\pi+4$

27. (*МФТИ, 1999*) Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x|+|y| \leqslant 2, \\ x^2+y^2 \geqslant 4(x+y-1), \\ (y-3x-2)(3y-x+2) \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:
а) первому неравенству системы;
б) первым двум неравенствам системы;
в) всем трем неравенствам системы.

а) 8; б) $10-\pi$; в) $6-\pi$

28. (*МФТИ, 1998*) Фигура M на плоскости (x, y) ограничена графиками функций $y = 3e^{ax}$ и $y = 7 - 2e^{-ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y = 9x + 3$. Найти a и площадь фигуры M.

3, $\frac{7\ln 6-10}{3}$

29. (*МФТИ, 1998*) График функции $y = x^3+ax^2+bx+c$, $c < 0$ пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найти a, b, c, если площадь треугольника AMN равна 1.

$a=-4$, $b=5$, $c=-2$

30. (*МФТИ, 1997*) Графику функции $y = -x^3+ax^2+bx+c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x = 2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0; 2)$, а другая — через точку $(0; 6)$. Найти значения a, b и c.

$a=6$; $b=-11$; $c=6$

31. (*МФТИ, 1997*) К графику функции $y = -\frac{x^2}{12}+x-\frac{16}{3}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y = 3|x+6|-\frac{7}{3}$ в точках A и B. Найти радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B и $C\left(-6; -\frac{7}{3}\right)$, если $\angle CAB = 2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}} + \angle CBA$.

$\frac{13\sqrt{10}}{16}$

32. (*МФТИ, 1997*) Пусть M — множество точек плоскости с координатами $(x; y)$ таких, что числа $3x$, $2y$ и $9-y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры M.

Фигура Φ состоит из точек множества M таких, что неравенство $t^2 + 2t(x-2) + 7 - y > 0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найти площадь фигуры Φ.

$18,\ \frac{73}{6}$

33. (*МФТИ, 1996*) График функции $y = f(x)$, где $f(x) = -2x^3 - 8ax^2 - 4a^2x + 5$, $a < 0$, и прямая l, заданная уравнением $y = 4a^2x + 5$, имеют ровно две общие точки.

1) Найти a, если площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямой l, равна $\frac{27}{2}$.

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции $y = f(x)$ в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наименьшей ординатой. Найти эту ординату.

$a = -\frac{2}{3},\ y_{\min} = -11$

34. (*МФТИ, 1995*) В прямоугольном треугольнике ABC точка D — середина гипотенузы AB, а медианы треугольника пересекаются в точке E. Треугольник ABC расположен на координатной плоскости Oxy так, что точка A лежит на оси Oy, точка D симметрична точке C относительно оси Oy, а точки C, D и E лежат на графике функции $y = (x^2-5)^2$. Найти уравнение прямой CD и площадь треугольника ABC.

$CD : y = 16,\ S = 18\sqrt{3}$

35. (*МФТИ, 1995*) Парабола Π_2 симметрична параболе Π_1 $y = ax^2$, $a < 0$ относительно точки $N(b; ab^2)$, где $b > 0$. Некоторая прямая пересекает каждую из парабол ровно в одной точке: Π_1 — в точке B_1, Π_2 — в точке B_2 так, что угол B_1B_2N — прямой. Касательная к параболе Π_1, проведенная в точке B_1, пересекает отрезок B_2N в точке L. Определить, в каком отношении точка L делит отрезок B_2N. Найти значения параметров a и b, при которых длина отрезка B_1L минимальна, если площадь треугольника B_1B_2N равна $\frac{1}{3}$.

$NL : LB = 1 : 2,\ a = -\frac{1}{3},\ b = \frac{1}{2}$

36. (*МФТИ, 1995*) На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{y-x}(2y - 2xy) \leqslant 2, \\ |x| \leqslant 4 - y. \end{cases}$$

Изобразить фигуру Φ и найти ее площадь.

$S = 10 - \frac{\pi}{4}$

37. (*МФТИ, 1994*) На координатной плоскости даны точки $A(2; -3)$ и $B(4; 0)$. При каких значениях параметра p, $p > -5$, ближайшая к графику функции $y = \sqrt{x^3} + p$ точка прямой AB лежит на отрезке AB?

$-\frac{10}{3} \leqslant p \leqslant 1$

38. (*ОММО, 2010.10*) Изобразите на координатной плоскости множество точек (a, b) таких, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{|b| \leqslant \sqrt{2}|a|}$

39. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.5*) На координатной плоскости изобразите множество точек (a, b), для каждой из которой область определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{2a-b-x}{2a-b+x}} \left(\frac{x-a-b}{x+a+b} \right)$$

не содержит ни одной точки из отрезка $[1; 2]$