Параметр как переменная

В некоторых задачах бывает полезно воспринять параметр как отдельную переменную и решать данное уравнение или неравенство относительно параметра.

Задача 1. (*ОММО, 2013*) При каких значениях параметра a уравнение $2x^4 + 9ax + 7a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

Решение. Ключевая идея здесь состоит в том, чтобы поменять ролями буквы x и a: переменную x сделать параметром, а параметр a — переменной. Тогда уравнение получается квадратным относительно a, и вопрос формулируется так: определить, при каких целых значениях параметра x уравнение

$$7a^2 + 9ax + 2x^4 = 0 \tag{1}$$

имеет корни, и найти эти корни. Вычисляем дискриминант:

$$D = 81x^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2x^4 = x^2\left(81 - 56x^2\right).$$

Как видим, дискриминант неотрицателен лишь при трёх целочисленных значениях x, равных 0 и ± 1. Если $x = 0$, то уравнение (1) даёт $a = 0$. Если $x = 1$, то получаем уравнение $7a^2 + 9a + 2 = 0$, откуда $a = -1$ или $a = -2/7$. Наконец, если $x = -1$, то уравнение (1) принимает вид $7a^2 - 9a + 2 = 0$, откуда $a = 1$ или $a = 2/7$.

Ответ: 0; ± 1; $\pm\frac{2}{7}$.

Задача 2. Найти все a, при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение. В предыдущем листке «Параметры. Рациональные уравнения и неравенства» эта задача была решена с помощью обычного метода интервалов.

А теперь давайте поменяем ролями x и a: воспримем a как переменную, а x — как параметр. Перепишем наше неравенство следующим образом:

$$\frac{a - \frac{x-1}{2}}{a - x} < 0, \tag{2}$$

и будем решать неравенство (2) относительно a.

Ясно, что при $x \in [1; 2]$ имеем $\frac{x-1}{2} < x$, поэтому множество решений неравенства (2) есть

$$\frac{x-1}{2} < a < x. \tag{3}$$

Когда x меняется от 1 до 2, величина $\frac{x-1}{2}$ меняется от 0 до $\frac{1}{2}$. Чтобы найти множество A всех значений a, удовлетворяющих условию (3) **при всех** $x \in [1; 2]$, нужно взять пересечение всех интервалов $\left(\frac{x-1}{2}; x\right)$ при x пробегающем значения от 1 до 2. Получим:

$$A = \bigcap_{x \in [1;2]} \left(\frac{x-1}{2}; x\right) = \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Задача 3. (*МГУ, мехмат, 1992*) Найти все x, при которых неравенство

$$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+a^2+4a-5>0$$

выполняется хотя бы для одного $a\in[-2;1]$.

Решение. Данное неравенство, будучи кубическим относительно x, является квадратным по a. Поэтому давайте перепишем его следующим образом:

$$a^2+\left(x^3-2x^2+4\right)a+2x^3-x^2-6x-5>0.$$

Обозначим

$$f(a)=a^2+\left(x^3-2x^2+4\right)a+2x^3-x^2-6x-5,$$

где x играет роль параметра. Нам нужно выяснить, при каких x функция $f(a)$ принимает положительное значение хотя бы в одной точке отрезка $[-2;1]$.

Эти искомые значения x мы назовём *хорошими*. Назовём *плохими* все остальные x; иными словами, плохими являются все те значения x, при которых выполнено

$$f(a)\leqslant 0 \text{ для любого } a\in[-2;1]. \tag{4}$$

В нашей задаче проще искать плохие значения x (а потом найти хорошие как дополнения плохих до множества $\mathbb{R}$). Дело в том, что множество плохих x описывается очень просто. Поскольку коэффициент перед a^2 у функции $f(a)$ положителен, *для выполнения условия* (4) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств*

$$\begin{cases} f(-2)\leqslant 0,\\ f(1)\leqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

(см. листок «Параметры и квадратный трёхчлен. 2»).

Имеем:

$$f(-2)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3),$$
$$f(1)=3x^3-3x^2-6x=3x(x+1)(x-2),$$

так что система (5) принимает вид:

$$\begin{cases} (x+1)(x-3)\leqslant 0,\\ x(x+1)(x-2)\leqslant 0. \end{cases}$$

Решения данной системы легко находим методом интервалов:

$$x=-1,\quad 0\leqslant x\leqslant 2. \tag{6}$$

Это и есть множество плохих значений x. Искомое множество хороших значений x есть дополнение до $\mathbb{R}$ множества (6):

$$x<-1,\quad -1<x<0,\quad x>2.$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Задачи

1. Найти все a, при которых неравенство

$$\frac{4x-a}{x-2a} < 0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $2 \leqslant x \leqslant 4$.

$\boxed{a \in (2;8)}$

2. Найти все a, при которых неравенство

$$\frac{x+3a-5}{x+a} \geqslant 0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x \leqslant 4$.

$\boxed{a \in (-\infty;-4) \cup [\frac{4}{3};+\infty)}$

3. (*МГУ, физический. ф-т, 1997*) Найдите все a, при которых неравенство

$$\frac{x-3a-1}{x+2a-2} \leqslant 0$$

выполняется для всех x из промежутка $2 \leqslant x \leqslant 3$.

$\boxed{a \in (-\infty;-\frac{1}{2}) \cup [\frac{2}{3};+\infty)}$

4. (*МГУ, геологич. ф-т, 2002*) Найдите все $a > 0$, при которых неравенство

$$\frac{a+2x}{ax-4} \geqslant \frac{5}{x}$$

выполнено для всех $x > 10$.

$\boxed{a \in [\frac{2}{5};\frac{11}{2}]}$

5. (*МГУ, филологич. ф-т, 1980*) Найдите все $a \leqslant -4$, при которых уравнение

$$x^2 + ax - 3x - 2a = 2$$

имеет наименьший корень.

$\boxed{a = -4}$

6. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1988*) Найдите наибольший корень уравнения

$$x^2 + (3ab + 3a - 2)x + 5ab + 5a = 17$$

при $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$.

$\boxed{3}$

7. (*ОММО, 2013*) При каких значениях параметра a уравнение $5x^4 + 7ax + 2a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

$\boxed{0,\ \pm 1,\ \pm\frac{5}{2}}$

8. (*МГУ, ИСАА, 2000*) Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\left|x^2 + 4x - a\right| > 6$$

не имеет решений на отрезке $[-3; 0]$.

$\boxed{a \in [-6; 2]}$

9. (*МГУ, биологич. ф-т, 1994*) Найдите все такие значения x, при которых неравенство

$$(4 - 2a)x^2 + (13a - 27)x + 33 - 13a > 0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

$\boxed{x \in \left[3 - \sqrt{6}; 2\right] \cup \left[5; 3 + \sqrt{6}\right]}$

10. (*МГУ, химический ф-т, 1987*) Найдите все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\left(p - x^2\right)(p + x - 2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$.

$\boxed{p \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)}$

11. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1993*) Найдите все значения a, при которых неравенство

$$x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} < 7a - 1$$

не имеет положительных решений.

$\boxed{a \in \left[-1; -\frac{1}{5}\right]}$

12. (*МГУ, мехмат, 1992*) Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2 - a)x^3 + (1 - 2a)x^2 - 6x + 5 + 4a - a^2 < 0$$

хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1; 2]$.

$\boxed{x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)}$

13. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1992*) Найдите все значения a, при которых неравенство

$$2ax + 2\sqrt{2x + 3} - 2x + 3a - 5 < 0$$

выполняется при всех $x \in [-1; 3]$.

$\boxed{a < \frac{1}{2}}$

14. (*МГУ, мехмат, 1989*) Найти наименьшее x, при котором существуют y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

$\boxed{-\sqrt{\frac{7}{5}}}$

15. (*МГУ, биологический ф-т, 1999*) Найти все $x > \frac{1}{2}$, при которых неравенство

$$4x^3y^2 - 6x^3y - 10x^2y^2 - 16x^3 + 11x^2y + 8xy^2 + 50x^2 - 4xy - 2y^2 - 52x - y + 18 < 0$$

выполняется для всех $y \in (1; 2x)$.

$\boxed{x \in [\frac{5}{6}; 1) \cup (1; \frac{3}{2}]}$

16. (*МГУ, МШЭ, 2007*) При каких значениях параметра b уравнение

$$81^x - 2 \cdot 3^{3x+1} + 8 \cdot 9^x + (6b - 12) \cdot 3^{x-1} - b^2 + 4b - 4 = 0$$

имеет три различных корня?

$\boxed{b \in (1; 2) \cup (2; 5) \cup (5; 6)}$