Условный экстремум

В предыдущем листке «Область значений функции» мы, в частности, выяснили, как в некоторых случаях найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$. Сейчас мы рассмотрим более общую ситуацию: нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных $f(x, y)$ при дополнительном условии, что эти переменные связаны друг с другом теми или иными соотношениями. Это и есть задача на *условный экстремум*[1].

Задача 1. Найти наименьшее расстояние от начала координат до точек прямой $3x + 2y = 1$.

Решение. Расстояние от начала координат до точки (x, y) равно $\sqrt{x^2 + y^2}$. Вместо минимизации расстояния можно минимизировать его квадрат, поэтому задача ставится так: найти наименьшее значение величины

$$s = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

при условии

$$3x + 2y = 1. \qquad (2)$$

Из (2) выражаем y и подставляем это выражение в (1):

$$s = x^2 + \left(\frac{1-3x}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\,,$$

то есть

$$13x^2 - 6x + 1 - 4s = 0.$$

Нам нужно найти наименьшее s, при котором данное квадратное уравнение имеет решение. Как это сделать — очевидно:

$$D = 52s - 4 \geqslant 0,$$

откуда $s \geqslant \frac{1}{13}$. Следовательно, наименьшее значение s равно $\frac{1}{13}$, а искомое наименьшее расстояние равно $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x + 2y$, если x и y удовлетворяют условию $3x^2 - 2xy + 4y^2 \leqslant 5$.

Решение. Нам нужно найти наибольшее и наименьшее значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x + 2y = a, \\ 3x^2 - 2xy + 4y^2 \leqslant 5 \end{cases} \qquad (3)$$

имеет решения.

Удобно из равенства системы (3) выразить $2y$:

$$2y = a - x, \qquad (4)$$

и подставить в неравенство этой системы:

$$3x^2 - x(a - x) + (a - x)^2 \leqslant 5,$$

[1] Вообще, нахождение условных экстремумов функций нескольких переменных — классическая тема высшей математики. Однако некоторые задачи вам доступны уже сейчас!

то есть

$$5x^2 - 3ax + a^2 - 5 \leqslant 0. \tag{5}$$

Данное неравенство имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен:

$$D = -11a^2 + 100 \geqslant 0,$$

откуда

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} \leqslant a \leqslant \frac{10}{\sqrt{11}}\,.$$

При таких и только при таких a ввиду (4) будет иметь решения и система (3). Следовательно, наибольшее из подходящих a равно $\frac{10}{\sqrt{11}}$, а наименьшее равно $-\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $\frac{10}{\sqrt{11}}$ и $-\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Задача 3. (*МГУ, геологич. ф-т, 2007*) Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x + 2 = z + y, \\ xy + z^2 + 22 - 9z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найдите это максимальное значение.

Решение. Найдём сначала множество возможных значений z. Именно, воспринимаем z как параметр и ищем, при каких z данная система имеет решения относительно x и y.

Выражаем y из первого уравнения:

$$y = x - z + 2, \tag{6}$$

и подставляем во второе. После преобразований получим:

$$x^2 + (2 - z)x + z^2 - 9z + 22 = 0.$$

Чтобы это квадратное уравнение имело корни, его дискриминант должен быть неотрицательным:

$$D = -3z^2 + 32z - 84 \geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{14}{3} \leqslant z \leqslant 6. \tag{7}$$

Ввиду (6) заключаем, что исходная система имеет решения, если и только если z принадлежит отрезку (7).

Теперь перепишем нашу систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x - y = z - 2, \\ xy = 9z - z^2 - 22. \end{cases}$$

Теперь имеем:

$$s = x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (z - 2)^2 + 2\left(9z - z^2 - 22\right),$$

то есть

$$s = -z^2 + 14z - 40. \tag{8}$$

Графиком функции $s(z)$ служит парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы равна 7, поэтому на отрезке (7) функция (8) является возрастающей и достигает наибольшего значения на правом конце этого отрезка:

$$s_{\max} = s(6) = 8.$$

Ответ: 8 при $z = 6$.

Задача 4. (*«Ломоносов», 2007*) Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0,0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

Решение. Добавим для удобства к нашему множеству его границу (искомый угол от этого не изменится). Таким образом, мы имеем дело с фигурой S, заданной на координатной плоскости нестрогим неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 \leqslant 0. \tag{9}$$

Расположение и вид фигуры S схематически показаны на рис. 1. Мы ищем угол φ между двумя «крайними» прямыми, проходящими через точки фигуры S и начало координат[2].

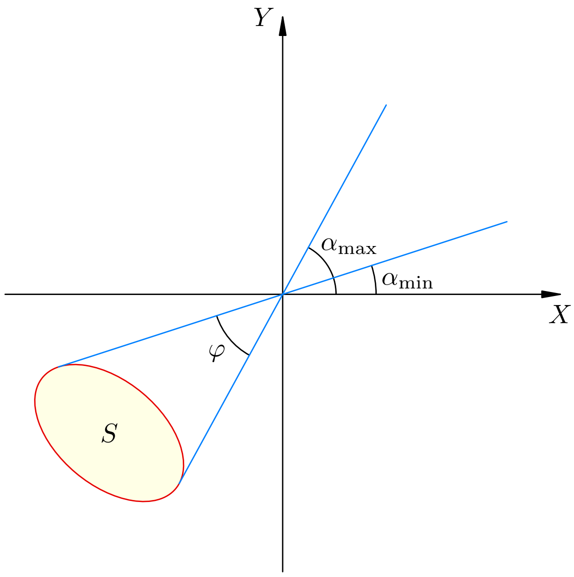

Рис. 1. К задаче 4

Покажем прежде всего, что фигура S целиком расположена в третьей четверти (как это и показано на рисунке). Неравенство (9) является квадратным по y:

$$y^2 + (x+2)y + 14x^2 + 14x + 4 \leqslant 0. \tag{10}$$

Для всех точек фигуры S дискриминант квадратного трёхчлена (10) неотрицателен:

$$D = -55x^2 - 52x - 12 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 55x^2 + 52x + 12 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{6}{11} \leqslant x \leqslant -\frac{2}{5}.$$

[2] На самом деле фигура S — это эллипс с внутренними точками, а ищем мы угол между двумя касательными к эллипсу, проходящими через начало координат. Распознавать эллипс и другие кривые второго порядка вы научитесь в вузовском курсе аналитической геометрии.

Аналогично, неравенство (9) является квадратным по x:

$$14x^2 + (y+14)x + y^2 + 2y + 4 \leqslant 0,$$

и дискриминант его также неотрицателен:

$$D = -55y^2 - 84y - 28 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-42-\sqrt{224}}{55} \leqslant y \leqslant \frac{-42+\sqrt{224}}{55}\,.$$

Мы видим, что проекциями фигуры S на координатные оси X и Y служат соответственно отрезки $\left[-\frac{6}{11}; -\frac{2}{5}\right]$ и $\left[\frac{-42-\sqrt{224}}{55}; \frac{-42+\sqrt{224}}{55}\right]$, расположенные на отрицательных полуосях. Значит, фигура S действительно находится целиком в третьей четверти, и поэтому видна из начала координат под острым углом.

Теперь заметим, что для каждой точки (x, y) фигуры S отношение y/x есть тангенс угла α между прямой, соединяющей эту точку с началом координат, и осью X. На рис. 1 показан наибольший $\alpha_{\max}$ и наименьший $\alpha_{\min}$ из углов α; их разность

$$\varphi = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$$

и есть искомый угол.

Таким образом, нас интересует наибольшее и наименьшее значение величины

$$k = \frac{y}{x}$$

при условии, что x и y связаны неравенством (9). Подставляя $y = kx$ в неравенство (9), получим:

$$(k^2 + k + 14)x^2 + (2k + 14)x + 4 \leqslant 0.$$

При фиксированном k это неравенство задаёт отрезок значений x для тех точек фигуры S, которые лежат на прямой $y = kx$. Дискриминант должен быть неотрицательным:

$$D = -3k^2 + 10k - 7 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant k \leqslant \frac{7}{3}\,.$$

Теперь находим:

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg}\frac{7}{3}\,, \quad \alpha_{\min} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

откуда

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}\,.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Задачи

1. (*МГУ, ВМК, 1986*) Найти координаты точки, лежащей на прямой $-4x - 3y = 25$ и наименее удалённой от начала координат.

$\boxed{(-4, -3)}$

2. (*МГУ, физический ф-т, 1995*) Найти наименьшее значение xy при условии

$$\begin{cases} x + y = 3a - 1, \\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 2a + 2. \end{cases}$$

$\boxed{-\frac{9}{10}}$

3. (*МГУ, ВМК, 2006*) Пусть (x, y) — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = \alpha + 2, \\ 9x^2 + y^2 = 5\alpha - 2. \end{cases}$$

При каком α произведение xy принимает наибольшее значение?

$\boxed{\alpha = 4}$

4. (*МГУ, ВШБ, 2004*) Найдите наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + y^2 = 16$.

$\boxed{10}$

5. (*ОММО, 2019*) Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$3 \arcsin x - 2 \arccos y$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

$\boxed{\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$

6. (*МГУ, ф-т психологии, 1986*) Найти наименьшее значение суммы $x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leqslant 0, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

$\boxed{7\sqrt{3}}$

7. (*МГУ, географич. ф-т, 2001*) Найти наименьшее значение выражения

$$2x^2 - 4y^2 - z^2 + 6x + 4yz$$

при условии, что числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию, а числа $x - z$, $z - y$, $2x$ — геометрическую.

$\boxed{-9}$

8. (*МГУ, химический ф-т, 1997*) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$ при условии

$$x^2 - xy + 2y^2 = 1.$$

$\boxed{\frac{8+2\sqrt{2}}{7} \text{ и } \frac{8-2\sqrt{2}}{7}}$

9. (*МГУ, ф-т глобальных процессов, 2005*) Переменные x, y связаны условием

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0.$$

Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями выражения $2ax - 3y - 10$ больше 12.

$\boxed{|a| > \frac{\sqrt{3}}{2}}$

10. (*МГУ, биологический ф-т, 1989*) Числа x, y, z таковы, что

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x + y - z$?

$\boxed{\frac{4\sqrt{6}}{3}}$

11. (*МГУ, геологич. ф-т, 2007*) Числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x + 1 = z + y, \\ xy + z^2 + 14 - 7z = 0. \end{cases}$$

При каких значениях z сумма $x^2 + y^2$ максимальна? Найдите это максимальное значение.

$\boxed{8 \text{ при } z = 5}$

12. (*«Ломоносов», 2007*) Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$25x^2 + xy + y^2 + 16x + 2y + 3 < 0.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{2}{11}}$

13. (*МГУ, ВМК, 2000*) Найдите наибольшее значение выражения

$$4x^2 + 80x + y + 43$$

при условии, что

$$6x^2 + 32x + y + 283 \leqslant 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 86x + y + 202 \geqslant 0.$$

$\boxed{30}$

14. (*МГУ, мехмат, 2002-07.6*) Найдите минимальное значение выражения $(x + y - z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств

$$1 \leqslant (x + y)^2 \leqslant \frac{4}{3}, \quad 8 \leqslant (y + z)^2 \leqslant 9, \quad 10 \leqslant (z + x)^2 \leqslant 11.$$

$\boxed{\frac{(3+\sqrt{8}-\sqrt{11})^2}{4}}$

15. (*МГУ, ИСАА, 2004*) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\frac{y^2}{25}+\frac{w^2}{144}\,,$$

если величины x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-20=0,\\ z^2+w^2-2w-143=0,\\ xw+yz-x+w+2z-61\geqslant 0. \end{cases}$$

$\boxed{\frac{4201}{3600}\pm\frac{\sqrt{601}}{30}}$